Investigación De Operaciones 1

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Investigación De Operaciones 1 / Danilo De Jesús Ariza Agámez, /
Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5455-98-6

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Investigación De Operaciones 1

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Conceptos básicos e introducción a la Programación Lineal

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La investigación de operaciones resulta ser una valiosa herramienta matemática orientada al apoyo en la toma de decisiones asociadas con la gestión de recursos. A través del desarrollo del presente curso de Investigación de Operaciones I se aborda un importante conjunto de herramientas de gestión muy relacionadas con procesos de ingeniería. En esta primera cartilla se da tratamiento a algunos conceptos generales del área, tales como las partes en que se divide, los procesos genéricos involucrados, luego se inicia la introducción a la programación lineal como una de las ramas de la investigación de operaciones, esta introducción contempla los primeros conceptos particulares y se ilustra las generalidades, a través de la presentación de un sencillo ejemplo. El desarrollo del curso, además de cada una de las cartillas cuenta con un conjunto de recursos, orientados a favorecer la comprensión de cada uno de los contenidos, entre los que se cuenta enlaces a videos, ejercicios resueltos a manera de lecturas complementarias o como requisito para enfrentar los ejercicios de repaso.

U1

Metodología

Es claro que el estudiante tiene total autonomía de desarrollar el estudio de las temáticas de esta semana acudiendo a los recursos en el orden que lo desee, sin embargo creemos que el acercamiento a los temas ofrecidos en esta cartilla, se debe buscar inicialmente a través de su cuidadosa lectura, donde se presenta los conceptos y principios básicos de investigación de operaciones y las primeras incursiones en el área particular de programación lineal, lo que se puede complementar mediante la visualización de video capsulas y la revisión de las lecturas complementarias, estos recursos contemplan, además de los temas propios de la cartilla, explicaciones y ejercicios resueltos sobre operaciones con vectores y matrices, esto con el fin de apoyar el desarrollo de temas presentados en cartillas posteriores. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso, sobre vectores y matrices, a través de los cuales usted puede validar sus avances y afianzamiento en operaciones con vectores y matrices como parte de la preparación para enfrentarse a otros temas del curso.

U1

Desarrollo temático

Conceptos básicos e introducción a la Programación Lineal

Investigación de operaciones ¿Qué es?

Con la evolución de la ciencia, la tecnología y procesos de ingeniería también ha aumentado la complejidad de los problemas a resolver, lo que en el en el ámbito empresarial ha llevado a que los procesos de gestión y desarrollo están claramente marcados, entre otras estrategias, por la división de tareas entre los diferentes equipos de las organizaciones. La complejidad en las actuales grandes empresas es tal que muchas veces entre sus diversos componentes se tiene objetivos o metas que resultan ser contradictorias. En la medida en que lo anterior se da es más complicado realizar la asignación de recursos de la mejor manera en relación con la globalidad de la empresa. La investigación de operaciones se origina en la necesidad de afrontar adecuadamente las problemáticas relacionadas con las afirmaciones anteriores, es decir, a través de la investigación de operaciones se procura hallar una mejor solución, o solución óptima, a un problema global.

Puede afirmarse más específicamente que la investigación de operaciones corresponde a la aplicación de principios asociados con el método científico a las tareas de gestión y administración de organizaciones, pero vale destacar que históricamente su aparición se remonta a los comienzos de la Segunda Guerra Mundial, cuando existía la marcada necesidad de asignación de escasos recursos a las diferentes operaciones militares, situación frente a la cual gobiernos como los de los estados Unidos e Inglaterra convocaron a expertos científicos para que se dedicaran a la investigación de sus operaciones militares que dieran lugar a un eficiente uso de los recursos. La efectividad de los resultados de las investigaciones en el campo de la guerra motivó a que en tiempos de posguerra los mismos fueran aplicados al ámbito de la gestión de organizaciones estatales y privadas. El hecho que la investigación de operaciones se fundamente en la aplicación de método científico permite que también se le llame ciencias de la administración.

Áreas de la investigación de operaciones

La investigación de operaciones encuentra aplicaciones en campos diversos tales como procesos de manufactura, planificación de transporte, construcción, diseño de sistemas de telecomunicaciones, planeación y gestión financiera, gestión de sistemas de salud, entre muchas otras. Diferentes problemas, según su naturaleza, se abordan desde diferentes áreas que forman este campo de la gestión. Entre las áreas de la investigación de operaciones se encuentran las siguientes:

- Programación Lineal.
- Programación Lineal entera.
- Programación no lineal.
- Programación dinámica.
- Teoría de inventarios.
- Problemas de asignación y transporte.
- Teoría de colas.

En el resto de este curso y en el correspondiente a Investigación de operaciones 2 estudiaremos en detalle algunas de estas áreas.

Etapas de un estudio de investigación de operaciones

Las tareas relacionadas con investigación de operaciones son realizadas bien sea por equipos de personas de la misma compañía o por compañías externas. Como conjunto de principios que soportan la toma de decisiones, la investigación de operaciones, además de los fundamentos y procedimientos matemáticos subyacentes, también debe estar apoyada por capacidades del analista, que no necesariamente caen dentro del ámbito de la investigación de operaciones, por ejemplo, además de la creatividad y malicia, se requiere, apropiada adopción de criterios para usar una u otra técnica de investigación de operaciones, capacidades comunicativas. Es claro entonces que no basta con dominar los principios propios de la investigación de operaciones, sin embargo nos permitimos presentar un conjunto de pasos o directrices básicas para llevar a cabo un estudio. Estos pasos se describen a continuación.

Definición del problema y recolección de datos

Esta fase de definición del problema se refiere a la tarea de precisar las características del problema a resolver ¿qué es lo que se quiere? La definición del problema es el horizonte al que deben mirar todos los miembros del equipo de solución. En esta fase se debe tener claridad sobre a) descripción de las diferentes alternativas b) definición del objetivo principal del estudio, y c) indicar las limitaciones con las que ha de funcionar el sistema. Es muy importante contar con la adecuada definición del problema, ya que de ello depende en buena medida las conclusiones a que se llegue y las decisiones que se puedan tomar consecuentemente. Tal como se comentó antes, la idea es alcanzar objetivos o metas que beneficien a la empresa en su globalidad, sin que esto signifique la consideración de objetivos que puedan ser poco relevantes y que en cambio entran en conflicto con objetivos fundamentales, es por ello que se debe considerar con el debido grado de especificidad los objetivos a alcanzar que preferiblemente sean los de más significativo impacto.

En cuanto a los datos, se debe contar con la cantidad suficiente que permita el adecuado entendimiento de la situación a resolver, lo cual será parte del insumo utilizado frente a un modelo matemático que se llegue a plantear. Se espera que la empresa tenga los debidos sistemas de información que permitan proporcionar al equipo de investigación de operaciones los datos verdaderamente útiles frente a las necesidades existentes con ello relacionadas.

Planteamiento de un modelo matemático hacia la solución

Con un problema bien definido la tarea siguiente en un estudio de investigación de operaciones es traducir la definición a un modelo matemático que corresponda a la esencia de la situación a resolver. Un modelo matemático es una representación ideal o una abstracción de situaciones reales mediante el uso de expresiones matemáticas. En la formulación del modelo generalmente es necesario establecer aproximaciones y simplificaciones en aras de lograr la formulación de un modelo que sea razonablemente tratable, sin embargo se debe tener cuidado de asegurarse que el modelo sea una adecuada abstracción del problema, es decir, que el modelo sea capaz de predecir con el suficiente grado exactitud el comportamiento del sistema real. Las expresiones o formulas correspondientes a las leyes de la física son ejemplos precisos de modelos matemáticos. La aplicación de un modelo matemático al mundo empresarial o de situaciones de ingeniería da lugar a formulaciones matemáticas que relacionan las diferentes variables involucradas, generalmente denominadas variables de decisión, y la medida asociada con el objetivo principal, o función objetivo. Se debe aclarar que un mismo problema puede dar lugar a diferentes modelos dependiendo del enfoque dado por el analista. Formulado el modelo matemático, el problema se convierte entonces en hallar los valores de las variables de decisión que dan lugar al mejor valor de la función objetivo.

Un modelo matemático, además de tener notable ventaja sobre representaciones verbales, en el sentido de ser una formulación concisa, brinda mayor posibilidad de comprensión del problema en conjunto, da luces sobre el análisis a realizar como parte de la solución y facilita el tratamiento y constituye un Puente para el uso de principios matemáticos y técnicas computacionales útiles en su análisis y solución.

Planteamiento de la solución a partir del modelo formulado

Cuando ya se tiene un modelo matemático que caracteriza el problema a resolver, el equipo de investigación de operaciones debe encarar un conjunto de procedimientos para encontrar la solución a partir del modelo formulado. Usualmente se puede aplicar procedimientos computacionales basados en paquetes de software para hallar la solución óptima o mejor solución, está mejor solución es en relación con el modelo que se ha planteado. Es posible que se obtenga una mejor solución del mismo problema si esta se halla a partir de una formulación diferente del modelo, lo cual indica que no hay total garantía que se encuentre la verdadera mejor solución, esto también en razón a que siempre existen detalles no considerados en el proceso de modelación o se asumen algunas aproximaciones. Generalmente, en lugar de acometer la búsqueda del valor óptimo, lo que algunas veces es imposible, en un estudio práctico de investigación de operaciones se busca una adecuada aproximación que constituya una apropiada base para la toma de decisiones.

Además, se debe tener en cuenta que muchas veces la búsqueda rigurosa del valor óptimo implica en algunos casos altos costos que no son plenamente justificados por el beneficio obtenido. Una importante corriente frente a estas situaciones es la aplicación de procedimientos heurísticos o intuitivos que, si bien no dan la solución óptima si proporcionan buenas soluciones aproximadas subóptimas.

Dado que una solución óptima hallada a partir de un modelo puede ser muy diferente del valor ideal real, en estudios de investigación de operaciones siempre se debe considerar análisis adicionales posteriores o análisis posóptimos, en los que, generalmente los administradores plantean preguntas sobre qué pasaría si se hubiese tomado en cuenta otras suposiciones en la formulación del modelo.

Validación del modelo y preparación para su implementación

En el mundo real empresarial no hay razones para pensar desde la primera propuesta de formulación se dé con el modelo, es muy probable que el modelo planteado presente fallas significativas asociadas con las suposiciones y aproximaciones realizadas o con ausencia de consideraciones importantes. Lo anterior lleva a que antes de aplicar el modelo a la realidad se debe realizar pruebas rigurosas que permitan la detección y corrección de fallas esto puede dar lugar a una serie de modelos propuestos a partir de modificaciones del original considerado hasta que se obtenga uno cuya aplicación represente un satisfactorio acercamiento a los resultados reales.

Luego de adoptar un modelo y su solución se debe crear un sistema que permita su aplicación, este sistema debe incluir los procedimientos de solución, el análisis posóptimo y las tareas operativas requeridas en su implementación. Es muy frecuente que se deba realizar la implementación del sistema con base en computadores.

Implementación de la solución

La fase de implementación consiste en llevar o traducir la solución planteada a un proceso operativo. Esta etapa debe considerar diferentes pasos, entre los que se incluye una clara explicación o capacitación a todo el personal que de alguna forma tenga que ver con la realización del estudio o su uso operativo. La adecuada solución y el éxito de su implementación puede dar lugar a que el sistema se aproveche por varios años, sin embargo a lo largo de estos se debe realizar las debidas supervisiones y detectar si se cumplen los supuestos sobre los cuales se planteó el problema e implemento la solución y, si es el caso, llevar a cabo posibles modificaciones. Otro importante paso en la etapa de implementación corresponde a la documentación, esta debe darse con la debida claridad y precisión de tal manera que no exista ambigüedad al realizar tareas propias de la operación basada en el sistema.

Herramientas de software en Investigación de operaciones

Los fundamentos de solución de problemas del ámbito de investigación de operaciones se encuentran en los algoritmos de cada área específica, tal como se trabajará en este curso. Para la solución de problemas de gran complejidad, en los que se involucra una enorme cantidad de variables, muchas veces se requiere la ayuda de herramientas de software que incorporan los algoritmos y procedimientos de solución de tal manera que no exista la necesidad de tediosos cálculos en casos de gran cantidad de variables. En las actividades relacionadas con el foro de las semanas 5 y 6, el estudiante tendrá la posibilidad de explorar respecto a algunas herramientas de software, el uso de las herramientas no se trata aquí, porque lo que nos interesa es la apropiación de principios de investigación de operaciones, no el uso de software que nos da la solución sin mostrarnos el proceso, sin embargo, tal como se señaló antes, se tendrá la oportunidad de conocer sobre ellas.

Programación Lineal

La Programación Lineal o PL es quizá el más importante avance en la ciencia a mitad del siglo pasado. Desde su aparición ha sido muy utilizada como herramienta de planificación en grandes empresas. Sobre la Programación Lineal se puede decir que corresponde al área de investigación de operaciones que ayuda a resolver problemas relacionados con la asignación de recursos limitados de la mejor forma posible, a diferentes actividades que compiten por ellos. Él término programación se debe entender como sinónimo de planeación, mientras que el carácter lineal se debe a que esta herramienta se vale del modelamiento matemático de un problema, en el cual las expresiones que relacionan las diferentes variables son funciones lineales. Si bien la planificación de asignación de recursos es el núcleo de su aplicabilidad, vale la pena señalar que la PL se puede usar en problemas de ámbitos distintos a la asignación de recursos, al ser modelados matemáticamente coincidan con el modelo matemático de la PL.

Ejemplo 1.1: un problema de Programación Lineal

Hasta aquí hemos comentado fundamentalmente que la PL ayuda en la solución de problemas de gestión en los cuales se debe asignar los recursos de la mejor manera posible con el fin de obtener los mejores resultados globales, sin embargo no hemos planteado una situación específica que ponga de manifiesto el significado de estas palabras en un contexto real. A continuación presentamos un caso típico de un problema que puede modelarse como un problema de PL.

Identificación y definición del problema

La empresa La Arenosa, cuya dinámica de negocio se basa en la producción y comercialización de artículos como ventanas y puertas de vidrio, cuenta con tres plantas de operación, El Tintal, Quinta Camacho y Puente Aranda. En la planta El Tintal se fabrican las molduras y marcos de aluminio, las molduras y marcos de madera se fabrican en la planta Quinta Camacho, mientras que la capacidad de la planta de Puente Aranda se dedica a la producción de vidrio y ensamble de productos finales. Con el fin de optimizar las utilidades económicas la gerencia contempla la necesidad de replantear la producción. Algunos artículos dejarán de producirse para liberar parte de la capacidad de las plantas con el fin de fabricar dos nuevos productos que, según estudios de costos y mercadeo darían importantes utilidades, estos son puertas de vidrio de 2,5 metros con marco de aluminio y ventanas corredizas de 1,20 por 1,90 metros con marco de madera. Las puertas solo necesitan parte de la capacidad de las plantas el Tintal y Puente Aranda, mientras que las ventanas requieren procedimientos de fabricación en solo en las plantas Quinta Camacho y Puente Aranda. Los estudios indican que se puede vender la totalidad de productos fabricados, sin embargo es necesario determinar cómo utilizar capacidad de producción en la planta de Puente Aranda para dedicarla a la fabricación de puertas y ventanas, de tal manera que se pueda lograr la mayor utilidad. El equipo de Investigación de operaciones que aborda el problema, luego de los respectivos análisis realizados con la participación de la gerencia, plantea la siguiente definición formal del problema:

En la fabricación de puertas de 2,5 metros (P1) y ventanas corredizas de 1,20 por 1,90 (P2) (en lotes de 20 unidades), se quiere determinar el número de lotes por semana de cada producto con el fin obtener la máxima utilidad posible, teniendo en cuenta las limitaciones de capacidad de las plantas, se puede dar cualquier combinación posible que satisfaga las restricciones.

Luego de haber definido el problema, el equipo de investigación de operaciones indaga sobre la utilidad que daría cada lote de nuevo producto; la cantidad de horas requeridas en cada planta para la producción de cada lote de nuevos productos, así como la cantidad de horas semanales disponibles en cada planta para fabricar los nuevos productos P1 y P2. Los datos obtenidos se resumen en la tabla 1.1.

Planta	Horas requeridos por lote		Horas semanales disponibles por planta
	P1	P2	
El Tintal	1	0	4
Quinta Camacho	0	2	12
Puente Aranda	3	2	18
Utilidad por lote	$ 6.000.000	$ 10.000.000	

Tabla 1. Datos del problema de la empresa La Arenosa
Fuente: Propia.

Modelamiento como un problema de Programación Lineal

A partir de definición del problema y la información recolectada, el equipo traduce la situación en el modelamiento como un problema de Programación Lineal, en el que debe tomarse decisiones en relación con la cantidad de lotes de los productos P1 y P2 que se fabricarán semanalmente, de tal forma que se logre la mayor utilidad posible. Para plantear el respectivo modelo del problema se debe definir un conjunto de variables asociadas con el problema, estas son:

$$x_1 = Cantidad\ de\ lotes\ de\ P1\ a\ fabricar\ por\ semana.$$

$$x_2 = Cantidad\ de\ lotes\ de\ P2\ a\ fabricar\ por\ semana.$$

$Z = Ganancia\ total\ en\ miles\ de\ pesos.$

En el contexto de la PL, a las variables como x_1 y x_2 se les denomina variables de decisión, debido a que se debe decidir que valores debe tomar para que la utilidad sea la mejor, mientras que a Z se le conoce como función objetivo

Si se ha de fabricar x_1 lotes del producto P1 y x_2 lotes del producto P2 y teniendo en cuenta la información de la tabla 1.1 encontramos que la función Z corresponde a la siguiente expresión

$$Z = 6x_1 + 10x_2$$

Como corresponde, según los objetivos de la empresa, se desea escoger los valores de x_1 y x_2 que den lugar al mayor valor de Z, es decir, se quiere maximizar esta función, teniendo en cuenta las limitaciones o restricciones en relación con la disponibilidad de horas en las plantas de producción. Según la tabla La tabla 1.1 cada lote del producto P1 requiere una hora semanal en la planta El Tintal, y sólo hay disponible 4 horas por semana, lo que se asocia con una restricción expresada mediante $x_1 \leq 4$, por otra parte, cada lote del producto P2 requiere dos horas de trabajo en la planta Quinta Camacho, cuya capacidad de producción está limitada a 12 horas semanales para nuevos productos, con lo cual la correspondiente restricción es $2x_2 \leq 12$. Cada lote de los productos P1 y P2 demandan respectivamente 3 y 2 horas semanales de trabajo en la planta Puente Aranda, pero esta planta limita la producción a un total de 18 horas por semana, lo que da la restricción $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, en el ámbito de la Programación Lineal a estas restricciones, que se refieren a las limitaciones del recurso, se les conoce como restricciones estructurales. Finalmente, teniendo en cuenta que no se puede producir una cantidad negativa de lotes de cada producto, las cantidades x_1 y x_2 deben satisfacer las restricciones $x_1 \geq 0$ y ≥ 0, las cuales son conocidas como restricciones de no negatividad. Una síntesis de lo anterior mediante expresiones matemáticas consiste en hallar los valores de x_1 y x_2 que permitan:

$$Maximizar\ Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$\begin{gathered} Sujeta\ a{:}\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Lo hecho hasta aquí corresponde a la formulación del modelo, debemos pensar en procedimientos de solución, en el siguiente numeral abordaremos una forma gráfica para resolver el problema.

Ejemplo 1.2.

Con el fin de familiarizarnos un poco más con los problemas del ámbito de Programación Lineal se presenta a continuación un problema que obedece la forma estándar del modelo matemático de Programación Lineal. El enunciado es el siguiente.

Definición del problema

Una empresa fabricante de muebles, originalmente solo produce juegos de pequeñas mesas, pero un estudio de mercadeo la ha llevado a tomar la decisión de ampliar su actividad de tal manera que adicionalmente va a producir guardarropas y camas, para lo cual dispone de tres máquinas. La elaboración de un juego de mesas demanda 2 horas de trabajo en la maquina 1, una hora en la máquina 2 y 2 horas en la 3, mientras que la fabricación de cada guardarropa necesita de una hora en la máquina 1, 3 en la 2 y una en la 3. Por su parte si se quiere fabricar una cama los recursos de tiempo requeridos son 3 horas en la máquina 1, 2 en la 2 y 2 en la 3. La producción y venta de un juego de mesa produce una utilidad de $ 60000, un guardarropa deja una ganancia de $ 50.000 y una cama deja $ 40000. El gerente de la fábrica desea saber de qué forma distribuir la utilización de las máquinas de tal manera que pueda obtener la mayor ganancia posible.

La definición y análisis del problema, el equipo de investigación de operaciones resume la situación en la en la tabla 1.2, donde también se registra el total de horas disponibles por cada máquina y la utilidad unitaria de cada producto en unidades de mil. Este problema será objeto de aplicación del método de solución estudiado en la cartilla de la próxima semana.

Máquina	Horas requeridas			Horas disponibles
	Mesas	Guardarropa	Cama	
M1	2	1	3	180
M2	1	3	2	300
M3	2	1	2	240
Útil./Unit	60	50	40	

Tabla 1.2. Datos del problema del ejemplo 1.2.
Fuente: Propia.

Modelamiento como un problema de Programación Lineal

Con base en la información registrada en la tabla 1.2 el modelamiento como problema de Programación Lineal que conduzca a la obtención de la mayor ganancia posible da lugar a la necesidad de definir las siguientes variables asociadas con las cantidades de productos a fabricar en cada período de un mes y la respectiva utilidad.

$$x_1 = Cantidad\ de\ juegos\ de\ mesas.$$
$$x_2 = Cantidad\ de\ guardaropa.$$
$$x_3 = Cantidad\ de\ camas.$$
$$Z = Ganancia\ total\ en\ miles\ de\ pesos.$$

En este caso la función corresponde a: $Z = 60x_1 + 50x_2 + 40x_3$

Se desea saber las cantidades a fabricar de cada producto teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo en las máquinas. De la tabla 1.x se tiene entonces la formulación como un problema de Programación Lineal.

$$Maximizar\ Z = Z = 60x_1 + 50x_2 + 40x_3$$
$$Sujeta\ a{:}\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 180$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 300$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 240$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

El modelo está planteado, lo hecho hasta aquí corresponde a la formulación del modelo, debemos pensar en procedimientos de solución, en el siguiente numeral abordaremos una forma gráfica para resolver el problema.

Procedimiento gráfico de solución de problemas de Programación Lineal

En los ejemplos que hemos citado como ilustración inicial de la Programación Lineal encontramos las variables de decisión, dos en el ejemplo 1.1 y tres en el 1.2. Tomando como referencia el problema del ejemplo 1.1, si consideramos el caso de igualdad en cada una de las restricciones y realizamos las correspondientes representaciones gráficas, donde la variable x_1 se asocia con el eje horizontal y x_2 con el eje vertical, obtenemos una línea recta por cada restricción estructural, las restricciones de no negatividad $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$ obligan a considerar solo valores en el primer cuadrante del plano cartesiano. En la figura 1.1 se muestra la representación gráfica de las líneas correspondientes al caso de igualdad.

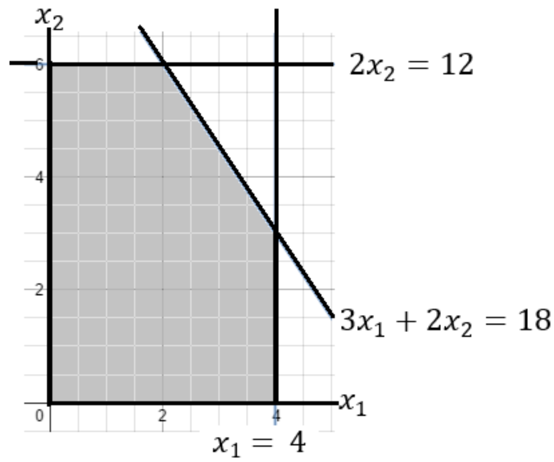


Figura 1. Representación gráfica asociada con el ejemplo de la empresa La Arenosa
Fuente: Propia.

En la figura 1 se ha sombreado la región limitada por las rectas obtenidas, el estudiante puede verificar que cualquier par de valores x_1, x_2 correspondientes a puntos sobre la región sombreada satisface las restricciones establecidas. En este contexto a la región se denomina región factible. Dado que se requiere hallar el par de valores x_1, x_2 que maximizan la función Z, nos corresponde analizar en cual o cuales de los puntos de la región factible se presenta el máximo de Z, para hallar este máximo nos fundamentamos en ensayo y error elaborando la gráfica de $Z = 6x_1 + 10x_2$ para algún valor de prueba de Z, por ejemplo $Z = 20$, si la recta tiene puntos en la región factible (al menos uno) significa que el valor elegido para Z es un valor válido de la función objetivo, aunque no necesariamente el máximo. Podemos probar con otros valores de Z y elaborar las respectivas gráficas y ver cuál da el mejor valor.

En la figura 2 se ha representado varias de estas rectas y se observa que son paralelas entre sí, además, entre las que se ha graficado, la que presenta el mejor valor de Z es aquella que se encuentra más lejos del origen.

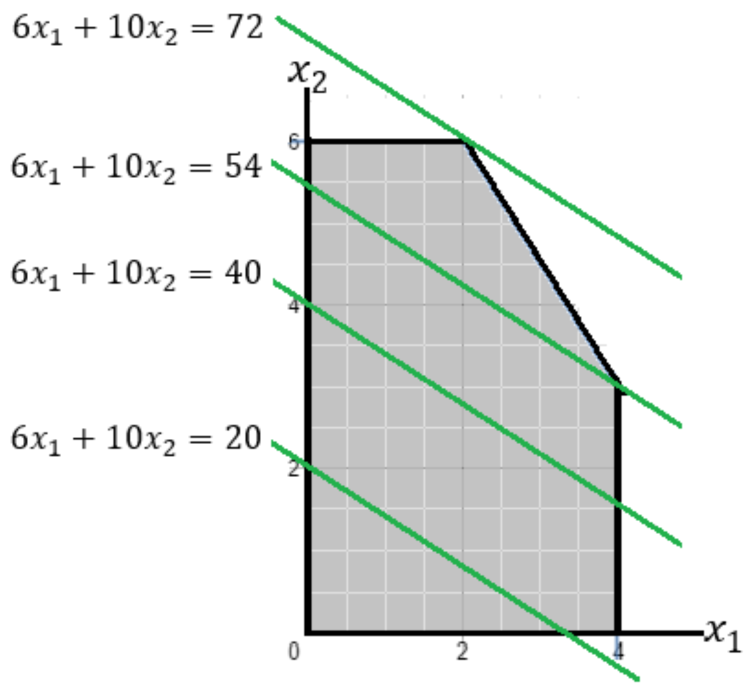


Figura 2. representación de rectas paralelas para hallar la solución del problema de la empresa La Arenosa
Fuente: Propia.

De lo anterior se podría inferir que la idea fundamental del método gráfico de solución consiste en trazar la familia de rectas paralelas de la forma $Z = c$ y observar cuál de las que tiene puntos sobre la región factible es la más alejada del origen, en esta recta, el punto o conjunto de puntos que se encuentre sobre la región factible da la solución al problema planteado. En la práctica se puede trazar una de ellas y valerse de procedimientos de traslación de la regla sin cambio de la pendiente sobre la región factible en la dirección que Z mejora su valor. La traslación se hace hasta que la regla pasa solo por un punto de la región factible. A manera de conclusión podemos ver que Z toma su máximo valor en el punto correspondiente a $x_1 = 2;\ x_2 = 6$ y el valor máximo es $Z = 72$.

El procedimiento gráfico solo es posible usarlo cuando se tiene problemas con dos variables de decisión (aunque con alguna dificultad se podría usar con tres variables), para casos de más de tres variables es imperativo el uso de métodos analíticos, cuyo estudio se iniciará en la cartilla de la semana 2 A continuación se presenta el modelo general de un problema de Programación Lineal.

Modelo general de un problema de Programación Lineal

El ejemplo presentado anteriormente, en el que existen dos variables de decisión, es apenas una de las instancias posibles de un problema de Programación Lineal. En general puede haber muchas variables de decisión y muchas expresiones que corresponden a limitaciones o restricciones estructurales propias del contexto del problema. En esta sección nos disponemos a estudiar el modelo general de un problema de Programación Lineal.

Terminología en un problema de Programación Lineal

En el ejemplo 1.1 nos podemos referir a las capacidades de las tres plantas de producción como los recursos y a la tarea de fabricar dos tipos de productos como las actividades. En general, en un problema de Programación Lineal se habla de la existencia de m recursos asignables a n actividades. La disponibilidad de recursos siempre está asociada con limitaciones de los mismos correspondientes a las restricciones.

La formulación o modelado de un problema de PL requiere el adecuado uso de símbolos y su significado, los cuales se presentan a continuación.

$$Z = \textit{función objetivo o medida global de desempeño}.$$

$$x_j \textit{ nivel de la actividad } j \ (\textit{para } j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$c_j = \textit{incremento en } Z \textit{ obtenido al aumentar una unidad en el nivel de la actividad } j.$$

$$b_i = \textit{cantidad de recurso disponible para asignarse a las actividades } (i = 1, 2, \ldots, m).$$

$$a_{ij} = \textit{cantidad del recurso } i \textit{ consumido por cada unidad de la actividad } j.$$

Generalmente, a partir de la formulación del problema se puede plantear un esquema en un cuadro que resume las diferentes actividades, el nivel de recursos que cada una de ellas usa y la cantidad de recurso disponible, tal como se muestra a continuación.

Recurso	Consumo de recursos por unidad de actividades Actividades				Disponibilidad de recursos
	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	…	$\boldsymbol{n}$	
$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{a_{11}}$	$\boldsymbol{a_{12}}$	…	$\boldsymbol{a_{1n}}$	$\boldsymbol{b_1}$
$\mathbf{2}$	$\boldsymbol{a_{21}}$	$\boldsymbol{a_{22}}$	…	$\boldsymbol{a_{2n}}$	$\boldsymbol{b_2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{a_{m1}}$	$\boldsymbol{a_{m2}}$	…	$\boldsymbol{a_{mn}}$	$\boldsymbol{b_m}$
Aporte a Z por unidad de actividad	$\boldsymbol{c_1}$	$\boldsymbol{c_2}$	…	$\boldsymbol{c_n}$	

Tabla 3. Parámetros del modelo general de problema de Programación Lineal
Fuente: Propia.

Lo cual significa que por cada unidad de la actividad 1 se utiliza una cantidad a_{11} del recurso 1, una cantidad a_{21} del recurso 2. Genéricamente, por cada unidad de la actividad n se utiliza una cantidad a_{1n} del recurso 1, una cantidad a_{2n} del recurso 2, y así sucesivamente. A los coeficientes $c_1, \dots, c_n;\ b_1, \dots, b_n;\ a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ se conocen como constantes o parámetros del modelo

Forma estándar del modelo de un problema de Programación Lineal

Cuando se cuenta con un cuadro que sintetiza la relación entre actividades, recursos y la función objetivo se puede proceder a plantear el modelo matemático correspondiente, lo cual consiste en hallar los valores de las variables de decisión $x_1, x_2, \dots, x_n$ para:

$$Maximizar: Z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{gathered} sujeta\ a: a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0$$

Esta forma se puede considerar en este curso como la forma estándar del modelo matemático del problema.

Otras formas de problemas de Programación Lineal

No todos los problemas de programación lineal encajan en el modelo antes planteado, existen otras formas en las cuales el objetivo es hallar el valor mínimo de alguna función, es decir, minimizar la función objetivo, también es posible que se presenten restricciones estructurales con el sentido de la desigualdad $\geq$ y no solo $\leq$, de igual forma algunas variables de decisión no necesariamente deben ser no negativas, esta opciones se presentan a continuación.

Necesidades de minimizar la función objetivo.

$$Minimizar: Z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$sujeta\ a: a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq \boldsymbol{o} \ \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq o \ \geq b_2$$
$$\vdots \vdots \vdots \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq o \ \geq b_m$$

$$x_i \in \ \mathbb{R}\, para\ algunos\ valores\ de\ i$$

Soluciones de un problema de Programación Lineal

Hemos visto en el ejemplo 1.1 que cualquier punto perteneciente a la región factible dibujada satisface las restricciones del problema planteado, esta idea permite establecer el concepto de **solución factible**, de cualquier problema de Programación Lineal, como aquella que satisface todas las restricciones del problema. Si una supuesta solución no satisface al menos una de las restricciones se considera como **no factible** y no puede ser tomada en cuenta. Por otro lado, no cualquier solución factible se ha de tomar como solución final del problema, para ello se debe considerar la solución factible que dé el mejor valor de la función objetivo, a tal solución se le llama **solución óptima.** Puede darse el caso que un problema tenga múltiples soluciones óptimas o incluso que no tenga ninguna. Posteriormente trataremos algunas situaciones ejemplo de estos casos.

En el ejemplo 1.1 los vértices $(0, 6), (2,6)\ y\ (4,3)$ son soluciones factibles, ya que hacer parte de la región factible, a este tipo de soluciones que se presentan en vértices de la región factible se les conoce como soluciones factibles en vértices.

Un conjunto de restricciones puede dar lugar a una región factible en forma de polígono, conocida como región acotada, como la de la figura 1.3.a, pero también se puede dar el caso de regiones no acotadas, como la de la figura 1.3.b. En cualquier problema de Programación Lineal con región factible acotada, el problema tiene soluciones factibles en vértices, en este caso también debe tener solución óptima, además, la mejor solución factible en vértice es una solución óptima. Si un problema de Programación Lineal tiene solución óptima única tal solución se da en un vértice. En el caso de problemas con múltiples soluciones óptimas, por lo menos dos de ellas son soluciones en vértices.

1

Unidad 1

Soluciones de problemas de programación lineal: uso del método simplex

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla de la semana anterior tuvimos la oportunidad de abordar las generalidades de la Investigación de operaciones e iniciar el estudio de la programación lineal, abordamos también la solución gráfica de problemas de programación lineal en los que solo intervienen dos variables de decisión. El método gráfico con ciertas dificultades se puede emplear en casos de tres variables, pero no es posible usarlo para problemas que involucran cuatro o más variables, en estos casos es necesario valer se de algún procedimiento o método analítico, el procedimiento de mayor acogida es el Método Simplex.

El desarrollo del Método Simplex se dio en el año 1947 y se debe a George Dantzig, El Método Simplex ha demostrado su eficiencia en grandes problemas de programación lineal que además han demandado el uso de poderosos computadores, en el ámbito de la solución de problemas de PL hay una variada gama de aplicaciones de software correspondientes a implementaciones del método.

En esta semana y en las dos siguientes se aborda fundamentalmente el estudio del Método Simplex, en esta semana particularmente se presenta sus características fundamentales, ejemplos de aplicación, su interpretación gráfica, el procedimiento de solución aplicado a problemas dados en forma estándar. También se estudiará principios que permiten decidir sobre qué solución tomar en caso de múltiples óptimos y como emplear el método en casos de problemas dados en forma no estándar.

U1

Metodología

La lectura de esta cartilla constituye el punto de partida en el desarrollo del trabajo de la segunda semana del curso Investigación de operaciones I. su contenido es fundamentalmente alrededor del uso del Método Simplex como herramienta de solución de problemas de programación lineal. La propuesta metodológica en la que se basa el curso hace necesario tener esta lectura como referencia permanente y leerla de manera muy cuidadosa. En esta cartilla parte del trabajo sobre el Método Simplex se hace en su forma algebraica, por tanto se requiere que el estudiante cuente con el adecuado manejo de procedimientos algebraicos básicos. Otra parte es sobre la forma tabular lo que demanda el conocimiento de los procedimientos de eliminación gaussiana, por lo que se insiste al estudiante en la necesidad de remitirse a las lecturas complementarias, donde encontrará más explicaciones y ejercicios resueltos que le permitirán ampliar las posibilidades de comprensión de las temáticas aquí tratadas.

Dado que siempre es importante escuchar y observar las explicaciones de expertos, se propone un conjunto de videos, en la sección video capsulas, en las cuales se presenta explicación y desarrollo de ejercicios sobre el proceso de eliminación gaussiana, como tema accesorio, y del Método Simplex en forma tabular. Se recomienda al estudiante la visualización de estos videos.

Además de lo anterior es muy recomendable que haya realizado propuestos en la sección de ejercicios de repaso de la primera semana, de tal manera que pueda afrontar con mayor propiedad los ejercicios propuestos de esta semana, la realización de los ejercicios propuestos como ejercicios de repaso brindará oportunidad de mejor preparación para la presentación del quiz de esta semana.

Solución de problemas de programación lineal: uso del Método Simplex

El Método Simplex

Del Método Simplex se puede decir en principio que consiste en un procedimiento analítico orientado a la solución de problemas de PL, sus fundamentos tienen origen en la geometría, razón por la cual lo estudiamos inicialmente desde una perspectiva geométrica, para lo cual estaremos apoyados en la situación del ejemplo 1.1 presentado en la cartilla de la semana 1.

La figura 1 muestra la región factible correspondiente al ejemplo 1.1 y se señalan los vértices de la región, $(0,0)$ $(0,6)$ $(2,6)$, $(4,3)$ $(4,0)$, anotamos antes que las coordenadas de tales vértices son soluciones factibles, (soluciones factibles en vértices). Es fácil ver que cada vértice es la intersección de dos rectas asociadas con restricciones, en el caso general de un problema de PL con n variables de decisión, aunque no es posible visualizarlo geométricamente, cada solución factible en vértice corresponde a la intersección de n fronteras de restricción.

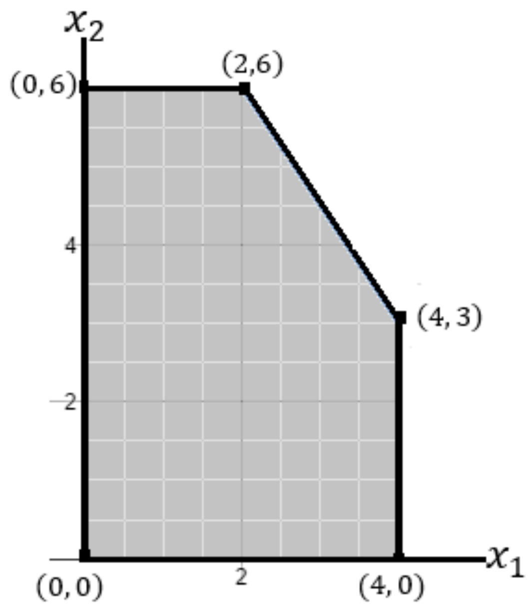


Figura 1
Fuente: Propia.

En el caso de un problema de programación lineal con dos variables de decisión, la figura 2.1 permite ver que dos vértices adyacentes comparten o satisfacen una misma restricción en común (una menos que el número de variables), extendiendo esta idea al caso general de un problema con n variables, se tiene entonces que dos soluciones factibles en vértices adyacentes comparten o satisfacen $n-1$ restricciones, tales soluciones factibles en vértices adyacentes se encuentran en un segmento de recta o arista de la región factible. Como de cada vértice se desprenden dos aristas, a cada solución factible en un vértice se le puede hallar dos soluciones factibles en vértices adyacentes (en aristas diferentes) ¿Cuál es el par de vértices adyacentes de cada uno de los vértices de la región factible dada en la figura 1?

Una idea importante respecto a las soluciones de un problema de PL es la **prueba de optimalidad**, a la prueba que nos referimos aquí establece que para un problema de PL con solución óptima, si una solución factible en un vértice no tiene soluciones factibles en vértices adyacentes que sean mejores, entonces tal solución debe ser una solución óptima. En el ejemplo 1.1 el vértice $(2, 6)$ debe ser solución óptima en razón a que el valor de $Z = 72$ con él asociado es mayor que los valores de Z asociados con los vértices adyacentes (0, 6) y (4, 3). Los detalles por los cuales se cumple esta propiedad se presentarán más adelante. La utilidad de esta prueba a la luz del Método Simplex consiste en que ayuda a determinar si en el proceso ya se ha alcanzado una solución óptima.

Análisis de la perspectiva geométrica del Método Simplex

Valiéndonos de la región factible del ejemplo 1.1, mostrada en la figura 2, presentamos las ideas básicas de la lógica del Método Simplex desde el punto de vista geométrico.

- **Paso inicial:** seleccionar el vértice (0, 0) como solución inicial.
- **Paso 2 o iteración 1:** examinar la posibilidad de hallar nuevas una mejor solución que (0, 0), para ello se considera las dos aristas que salen de (0, 0), si nos movemos a lo largo de la que aumenta x_2 se logra mayor aumento por cada unidad que si nos movemos a lo largo de la que aumenta x_1, nos detenemos al llegar a la primera frontera de restricción y calculamos el corte de esta restricción con la de la arista usada como trayectoria, es decir, las expresiones $x_1 = 0$ y $2x_2 = 12$, obteniéndose como resultado la nueva solución en el vértice (0, 6), con la cual el actual valor de la función objetivo es $Z = 60$.
- **Paso 3 o iteración 2:** buscar una mejor solución partiendo de (0, 6), al tomar la arista horizontal se logra aumento en la función objetivo porque aumenta el valor de x_2 sin que disminuya el de x_1, mientras que por a otra arista disminuye el valor de Z, nos detenemos al llegar a la primera nueva frontera de restricción y calcular el corte de esta restricción con la de la arista usada como camino de llegada, es decir, las expresiones $2x_2 = 12$ y $3x_1 + 2x_2 = 18$, obteniéndose la nueva solución en el (2, 6) correspondiente al valor de la función objetivo es $Z = 72$. Si realizamos estos procesos nuevamente a partir de la solución (2, 6) no se encuentra mejor solución, con lo que se puede concluir que la última solución factible hallada es la óptima.

De las consideraciones vemos que, para hallar la solución óptima, el Método Simplex solo toma en cuenta las soluciones factibles en vértices, recalcando lo anotado anteriormente en relación con solución de problemas de PL que tienen región factible acotada. Esto es importante en razón a que del infinito número de soluciones factibles solo hay que analizar un reducido número de posibilidades. También vale la pena ver que se toma como solución inicial la correspondiente a (0, 0), es decir, todas las variables de decisión valen cero, lo que evita la necesidad de realizar cálculos en la consecución de esta solución inicial.
En el análisis también se observa que en cada iteración, a partir de la solución actual, el Método Simplex solo considera como posibles mejores soluciones las correspondientes a vértices adyacentes, por tanto la trayectoria seguida hasta llegar a una solución óptima es el conjunto de aristas de la región factible. En el proceso de determinación de una mejor solución, con base en el Método Simplex solo se identifica en qué medida mejora el valor de Z por cada una de las aristas que parten del correspondiente vértice, al final se selecciona la arista que conduzca a la mayor mejora en el valor de Z. Con estos razonamientos finalizamos el análisis del Método Simplex desde el punto de vista geométrico y nos disponemos a abordar su estudio de forma algebraica.

Fundamentos algebraicos del Método Simplex

Un problema de PL que involucre más de tres variables de decisión no puede ser tratado con base en una representación gráfica de la región factible, razón por la cual se aborda mediante procedimientos algebraicos basados principalmente en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, las restricciones estructurales están expresadas en forma de inecuaciones, lo que demanda la necesidad de ajustar el modelo matemático del problema de forma tal que tales restricciones se puedan expresar en forma de ecuaciones.

Variables de holgura. Ajuste del modelo del problema

Para el tratamiento algebraico del problema convertimos las inecuaciones asociadas con restricciones estructurales mediante la incorporación de una variable de holgura. Para comprender esta idea consideremos primero la $i - esima$ restricción expresada mediante:

$$a_{i1}x_1 + \ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Esta inecuación se puede convertir en ecuación sumando un apropiado valor positivo x_h al lado izquierdo de la desigualdad, es decir:

$$a_{i1}x_1 + \ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_h = b_i$$

Con base en lo anterior, el modelo original se convierte en el siguiente:

$$\begin{array}{llllll}
\multicolumn{4}{l}{Maximizar\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \ldots + c_nx_n} & & Sujeto\ a: \\
a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \boldsymbol{+ x_{n+1}} & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & \boldsymbol{+ x_{n+2}} & & & = b_1 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & \boldsymbol{+x_{n+m}} & & = b_1 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots x_n \geq 0;\ x_{n+1} \geq 0; \ \cdots x_{n+m} \geq 0}
\end{array}$$

Esta forma de expresar el problema, consistente en m ecuaciones y $n + m$ variables incluyendo el uso de m variables de holgura (una por cada restricción estructural), se conoce como modelo ampliado, el cual facilita los procedimientos algebraicos asociados con el Método Simplex.

Ejemplo 2.1: utilizar variables de holgura para escribir el modelo del problema de la empresa La Arenosa en forma de ecuaciones.

Solución: se introduce la variable de holgura x_3 en la primera restricción estructural, x_4 en la segunda y x_5 en la tercera, con lo cual se obtiene el nuevo modelo del problema.

$$Maximizar \;\; Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeta\ a:$$

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & & + \; x_3 & & & = & 4 \\
 & 2x_2 & & + \; x_4 & & = & 12 \\
3x_1 + & 2x_2 & & & + \; x_5 & = & 18
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$$

Soluciones ampliadas, básicas y básicas factibles

Una solución hallada a partir de procedimientos sobre el modelo ampliado (incluye las variables originales y las de holgura) se conoce como **solución ampliada**. Una **solución básica** es una de las soluciones aumentadas pero en la intersección de dos restricciones, (no necesariamente en un vértice de la región factible), por lo que podría ser una solución no factible. Una **solución básica factible** o BF es una solución ampliada en un vértice de la región factible.

Vemos que un problema de m restricciones estructurales y n variables de decisión es modelado como un sistema ampliado de m ecuaciones y $m + n$ variables, la diferencia n entre el número total de variables $(m + n)$ y el número m de ecuaciones representa una cantidad conocida como grados de libertad, la cual da la posibilidad de elegir valores arbitrarios para n de la variables, por conveniencia se elige el valor de cero a estas variables. A las n variables cuyo valor se elige arbitrariamente se les llama variables no básicas, mientras que a las m restantes se les llama variables básicas. Nótese que entre las m variables básicas puede haber variables de holgura y que se tiene el problema de resolver un sistema de m ecuaciones con m variables básicas. Si los valores de las variables básicas, obtenidos como solución del mencionado sistema, cumplen las condiciones de no negatividad se tiene una solución básica factible **BF**.

En el Ejemplo 2.2, el número de ecuaciones es $m = 3$, originalmente el número de variables de decisión es $n = 2$, se introduce $m = 3$ variables de holgura para $m + n = 5$ variables en total. La diferencia entre el número total de variables y ecuaciones es 2, lo que significa que hay dos variables no básicas y tres variables básicas. Al asignar el valor de cero a las dos variables no básicas que se elija se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres variables (básicas).

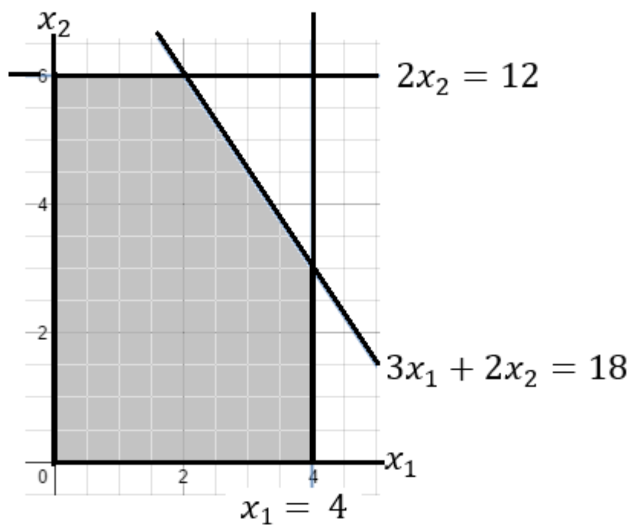


Figura 2
Fuente: Propia.

Para analizar de forma más cercana los conceptos consideremos siguientes soluciones ampliadas (aunque no detallamos aún como se obtienen, el estudiante puede verificar que satisface el modelo ampliado) correspondientes al ejemplo 2.2.

$a)\ x_1 = 4;\ x_2 = 6;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = -6$

$b)\ x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 4;\ x_4 = 12;\ x_5 = 18$

$c)\ x_1 = 0;\ x_2 = 6;\ x_3 = 4;\ x_4 = 0;\ x_5 = 6$

La solución $a)$ no es una solución básica factible porque la variable x_5 no satisface la condición de no negatividad, vemos también que correspondería a la solución no factible $x_1 = 4, x_2 = 6$ del problema original.

La solución $b)$ es una solución básica factible en un vértice, que correspondería a la solución factible $x_1 = 0, x_2 = 0$.

La solución c) es una solución básica factible en un vértice, que correspondería a la solución factible en el vértice $x_1 = 0, x_2 = 6$.

De la misma forma que se habla de pares de soluciones factibles adyacentes en vértices, se tiene también las correspondientes soluciones básicas factibles adyacentes, estas se reconocen teniendo en cuenta que dos soluciones básicas son adyacentes si coinciden en todas las variables no básicas, excepto una de ellas son las mismas. Lo anterior implica que todas las variables básicas, excepto una son las mismas, pero quizá con diferentes valores. Por tanto, para pasar de una actual solución básica factible a una solución adyacente se debe realizar un intercambio de una variable básica a una no básica y una no básica a básica y luego ajustar los valores de las variables básicas de tal forma que se satisfaga el sistema.

Si nos referimos al caso del ejemplo 2.2 las soluciones factibles $(0,0)\ y\ (0,6)$ se ubican en vértices adyacentes de la región factible mostrada en la Figura 2.2, por tanto las respectivas soluciones ampliadas son $(0,0,4,12,18)\ y\ (0,6,4,0,6)$ que son soluciones básicas factibles adyacentes, lo que se puede confirmar observando que coinciden en la variable no básicas x_1. Para pasar de la solución $(0,0,4,12,18)$ a $(0,6,4,0,6)$ se cambia x_1 de variable no básica a básica, operación contraria se hace con la variable x_4.

A partir de la expresión $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, que define la función objetivo, podemos escribir $Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$ e incorporar esta ecuación en el modelo ampliado del problema, esto con el fin de abordar los procedimientos algebraicos propios de la aplicación del Método Simplex, con lo que se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{array}{llllll}
\textit{Maximizar } Z & & \textit{Sujeto a}: & & & \\
Z - c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n & & & & & \\
\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + \boldsymbol{x_{n+1}} & & & & = b_1 \\
\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + \boldsymbol{x_{n+2}} & & & = b_1 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & & + \boldsymbol{x_{n+m}} & = b_1 \\
\quad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \ldots x_n \geq 0;\ x_{n+1} \geq 0;\ \cdots x_{n+m} \geq 0 & & & & &
\end{array}$$

Se destaca en esta forma que se ha agregado al sistema la variable Z y una nueva ecuación, con lo que el sistema ampliado consiste ahora en $m + 1$ ecuaciones con $m + 1$ variables. Los razonamientos planteados hasta aquí se refieren a la forma estándar de problemas de programación lineal, para problemas dados en una forma diferente se debe realizar consideraciones adicionales.

Procedimiento algebraico del Método Simplex

Luego de haber tratado el problema de la empresa La Arenosa desde la perspectiva gráfica en el ejemplo 1.1 y los fundamentos algebraicos en el ejemplo 2.1 se procede a continuación a poner en práctica los procedimientos algebraicos relacionados.

Ejemplo 2.2
A partir del modelo ampliado, mediante la incorporación de las debidas variables de holgura, resolver el problema de la empresa La Arenosa mediante los procedimientos algebraicos asociados con el Método Simplex.

Solución: el problema se formula como:

$$Maximizar\ \ Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeta\ a:$$

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & + x_4 & & = & 12 \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = & 18 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$$

- **Procedimiento de iniciación:** considerar como solución básica inicial aquella en la cual las variables x_1, y x_2 se toman como no básicas, es decir $x_1 = 0$, y $x_2 = 0$. Al sustituir estos valores en el sistema ampliado se tiene $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ y $x_5 = 18$. Por tanto la solución básica inicial es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 12$ y $x_5 = 18$.

- **Procedimiento de prueba de optimalidad:** con los valores actuales de x_1, y x_2, la función objetivo $Z = 6x_1 + 10x_2$ toma el valor 0 ($Z = 0$). Es claro que ninguna de las variables básicas x_3, x_4, x_5 contribuye con el valor de la función objetivo (sus coeficientes son cero), esto significa que un aumento en el valor de al menos una de las variables no básicas x_1, y x_2 da lugar a un mejor valor de la función objetivo, se concluye entonces que la actual solución no es óptima.

❖ **Primera iteración para mejorar la solución actual:** cada iteración en el proceso de solución del problema mediante el uso del Método Simplex está orientada a obtener una solución mejor que la solución actual, para ello en cada iteración se considera el siguiente conjunto de pasos:

Paso 1: selección de una variable no básica para ser básica. El paso inicial de cada iteración es seleccionar una las variables no básicas para que haga parte del conjunto de variables básicas, es decir, incrementar su valor y realizar el correspondiente ajuste de las otras variables básicas. Esto equivale al proceso descrito en la sección xx, consistente en pasar de una actual solución factible a una solución mejor a lo largo de una de las aristas que salen de la actual solución. La selección de la variable a convertirse en básica se hace teniendo en cuenta cuál de las variables no básicas tiene mayor coeficiente en la función objetivo Z, ya que este coeficiente indica en cuanto aumenta Z con el aumento en cada unidad de las variables no básicas consideradas. En el ejemplo se elige x_2 como nueva variable básica (variable básica entrante) porque su coeficiente es 10 mientras que el de x_1 es 6.

Paso 2: definición del límite de incremento de la nueva variable básica. El segundo paso de cada iteración consiste en determinar en qué medida o hasta qué valor se debe incrementar la nueva variable básica, de tal manera que modifique lo mejor posible la función objetivo dentro de la región factible. Es claro que, para satisfacer el sistema, el incremento de una de las variables hace que se deba modificar el valor de otras. Con la selección de x_2 como nueva variable básica y con x_1 siendo aún variable no básica, tenemos la siguiente implicación.

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & + x_4 & & = 12 \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = 12 - 2x_2 \\ x_5 = 18 - 2x_2 \end{array}$$

De donde se puede ver que, para satisfacer la de no negatividad de variables, es necesario que $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ y $x_5 \geq 0$. El incremento de x_2 sólo afecta a x_4 y x_5, por tanto es necesario que $12 - 2x_2 \geq 0$ y $18 - 2x_2 \geq 0$, lo que se satisface con $x_2 \leq 6$ y $x_2 \leq 9$. De donde claramente se debe elegir el mínimo de estos límites de incremento, es decir $x_2 \leq 6$. En el contexto de uso del Método Simplex, este procedimiento se conoce como prueba de cociente mínimo y se debe considerar en cada en todos los casos en que la variable básica entrante tenga coeficiente positivo. Con el máximo incremento permitido una de las variables básicas llega a cero convirtiéndose en variable no básica de la próxima solución

Básica factible. En este ejemplo x_4 es la variable que alcanza el valor cero, o variable básica saliente en la actual iteración.

Paso 3: determinación de la nueva solución básica factible. La elección de la variable no básica entrante y la básica saliente da lugar a nuevos valores de las otras variables básicas, los cuales se deben determinar para tener la nueva solución básica factible. En este tercer paso se convierte el sistema de ecuaciones en una nueva forma que facilite la determinación de los valores requeridos. Para ello se escribe el sistema en forma completa, incluyendo la ecuación asociada con la función objetivo, para el caso del ejemplo se tiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con seis variables, dos de ella se sabe que tienen valor cero, por ser variables no básicas, y además figura Z como variable básica.

$$
\begin{array}{llllllll}
(0) & Z - 6x_1 - 10x_2 & & & & & = & 0 \\
(1) & \quad x_1 & & + \; x_3 & & & = & 4 \\
(2) & & 2x_2 & & + \; x_4 & & = & 12 \\
(3) & \quad 3x_1 & + 2x_2 & & & + \; x_5 & = & 18
\end{array}
$$

Debido a que x_2 pasa a ser variable básica, buscamos que su coeficiente sea 1 en la ecuación (F_2) y cero en las demás ecuaciones. Aplicando operaciones básicas de filas asociadas con el procedimiento de eliminación de Gauss, el sistema se reduce a:

$$
\begin{array}{lllllll|lllllll}
F_0: & Z - 6x_1 - 10x_2 & & & & = & 0 & F_1 + 5F_3 \rightarrow & Z - 6x_1 & & & 5x_4 & = & 60 \\
F_1: & \quad x_1 & + \; x_3 & & & = & 4 & & \quad x_1 & & + \; x_3 & & = & 4 \\
F_2: & \quad\quad 2x_2 & & + \; x_4 & & = & 12 & \frac{1}{2}F_3 \rightarrow & & x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\
F_3: & 3x_1 + 2x_2 & & & + \; x_5 & = & 18 & F_4 - F_3 \rightarrow & 3x_1 & & & - \; x_4 + \; x_5 & = & 6
\end{array}
$$

Las operaciones hechas son: sumar 5 veces la ecuación F_3 a la F_1 $(F_1 + 5F_3)$, multiplicar por $\frac{1}{2}$ la ecuación F_3 $(\frac{1}{2}F_3)$ y restar la ecuación F_3 a la F_4 $(F_4 - F_3)$, tal como se señala anteriormente entre cada par de ecuaciones original y resultante. Sustituyendo $x_1 = 0, x_4 = 0$ en el último sistema, tenemos $x_3 = 4, x_2 = 6, x_5 = 6$, con lo cual la nueva solución básica factible es $(0, 6, 4, 0, 6)$ y según se encuentra a partir de la ecuación F_0 la función objetivo toma el valor $Z = 60$.

Paso 4: prueba de optimalidad de la actual iteración. En el paso 3 el valor actual de la función objetivo $Z = 60$ se obtiene de la ecuación F_0: $Z = 60 + 6x_1 - 5x_2$, como el coeficiente x_1 es positivo, cualquier incremento en su valor da lugar a una mejor solución básica factible adyacente, por lo cual se concluye que esta solución actual no es óptima.

Segunda iteración para mejorar la solución actual: con $Z = 60 + 6x_1 - 5x_2$ se tiene que el valor de la función objetivo mejora aumentando x_1 sin aumentar x_4, por tanto en esta iteración el primer paso es seleccionar a x_1 como nueva variable básica entrante. Para determinar hasta qué valor puede crecer la nueva variable básica x_1, a partir del último sistema ampliado, consideramos las siguientes implicaciones:

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 & & + x_3 & & & = & 4 \\
 & x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 & & = & 6 \\
3x_1 & & & - x_4 & + x_5 & = & 6
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{lll}
x_4 & = & 0 \\
x_3 & = & 4 - x_1 \\
x_2 & = & 6 \\
x_5 & = & 6 - 3x_1
\end{array}
$$

De lo anterior vemos que el incremento de x_1 solo afecta la no negatividad de x_3 y x_5 deduce que, para satisfacer la no negatividad de variables, es necesario que $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$ y $x_5 \geq 0$, por tanto es necesario que $4 - x_1 \geq 0$ y $6 - 3x_1 \geq 0$, lo que se satisface con $x_1 \leq 4$ y $x_1 \leq 2$. Con lo cual se debe elegir $x_1 \leq 2$. El incremento de 2 unidades en x_1 hace que x_5 sea cero convirtiéndose ahora en la variable básica saliente. Aplicando las respectivas operaciones sobre filas se encuentra el nuevo sistema ampliado mostrado a continuación.

$$
\begin{array}{llllllll|llllllll}
F_0: & Z - 6x_1 & & & 5x_4 & & = & 60 & F_0 + 2F_3 \rightarrow & Z & & & +3x_4 & + 2x_5 & = & 72 \\
F_1: & x_1 & + x_3 & & & & = & 4 & F_1 - \frac{1}{3}F_3 \rightarrow & & x_1 & + x_3 & & & = & 2 \\
F_2: & & x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 & & = & 6 & \rightarrow & & x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 & & = & 6 \\
F_3: & 3x_1 & & & - x_4 & + x_5 & = & 6 & \frac{1}{3}F_3 \rightarrow & & x_1 & & - \frac{1}{3}x_4 & + \frac{1}{3}x_5 & = & 2
\end{array}
$$

A partir del nuevo sistema ampliado se observa que la nueva solución básica factible es $(2, 6, 2, 0, 0)$, con la cual el valor de la función objetivo es $Z = 72$. La prueba de optimalidad se realiza a partir de $Z = 72 - 3x_4 - 2x_5 = 72$, se ve que cualquier incremento en las variables no básicas x_4 y x_5 da lugar a una disminución del actual valor de Z, por tanto el no hay solución básica adyacente que sea mejor que la solución actual, con lo que se concluye que la solución es óptima.

Forma tabular del Método Simplex

La forma tabular del Método Simplex, presentada en esta parte de la cartilla, es una forma que facilita la realización de los cálculos asociados. Los procedimientos algebraicos descritos en secciones anteriores constituyen el fundamente de solución, pero la realización de los cálculos en forma tabular permite resumirlos. Teniendo claro cuáles son las diferentes variables y el rol que desempeñan, a través de la forma tabular solo se debe registrar los coeficientes de las variables y las constantes así como las la variable básica que aparece en cada ecuación. Para comenzar a ilustrar el uso de la forma tabular del Método Simplex consideramos nuevamente el ejemplo de la empresa La Arenosa.

Ejemplo 2.3: aplicar el Método Simplex en su forma tabular para resolver el problema de la empresa La Arenosa.

Solución: de lo trabajado en el tratamiento algebraico se encuentra que el sistema de ecuaciones correspondiente, luego de agregar las variables de holgura y ajustar la escritura de la ecuación que define la función objetivo es:

$$\begin{aligned}
Z - 6x_1 - 10x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 4\\
2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 12\\
3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 18
\end{aligned}$$

La tabla 1 muestra una fila de encabezados, una columna para las variables básicas y las columnas de coeficientes de las variables. Se resalta la fila F_0 En el paso inicial se selecciona x_3, x_4 y x_5 como variables básicas lo que implícitamente indica que las no básicas son x_1 y x_2. Hasta este punto del desarrollo se tiene que la solución básica factible actual es $(0, 0, 4, 12, 18)$

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	0	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_5	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 1.
Fuente: Propia.

Para que la solución sea óptima se requiere que todos los coeficientes en la fila F_0 sean no negativos, como este no es el caso, la actual solución no es óptima y se requiere proceder con una iteración.

- **Primera iteración para mejorar la solución actual:** aquí el primer paso consiste en seleccionar una variable no básica para que pase a ser básica. La selección se hace con base en el coeficiente negativo de mayor valor absoluto (a lo que nos referimos aquí como el coeficiente más negativo) en la fila F_0, en este caso la variable seleccionada es x_2 ya que tiene coeficiente igual a -10. A la columna de coeficientes de la variable básica entrante en las filas posteriores a la fila F_0 se denomina columna pivote y se resalta en la tabla 2 mostrada a continuación.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	0	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_5	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 2
Fuente: Propia.

Para decidir la variable básica saliente se determina lo que llamamos fila pivote. Considerando solo los valores positivos de la columna pivote, se divide los valores del lado derecho o valores b_i de cada fila por el respectivo coeficiente en la columna pivote, la fila en la que resulta el menor cociente corresponde a la fila pivote, la variable básica de la respectiva fila es la variable básica saliente y el número en la intersección de la fila y columna pivote se llama número pivote. En el caso de este ejemplo F_2 es la fila pivote debido a que el cociente $\frac{12}{2} = 6$, mientras que el cociente de la fila F_3 es 9, la variable básica saliente es x_4 tal como se resalta a continuación.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	0	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_5	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 3
Fuente: Propia.

El paso que sigue es obtener una nueva tabla simplex mediante las siguientes modificaciones sobre la tabla 3.

- Registrar a x_2 como nueva variable básica en lugar de x_4.
- Dividir la fila pivote por el número pivote, en este caso el número por el cual se divide es 2.
- Modificar las filas restantes, sumando o restando un múltiplo de la fila pivote, de tal manera que los coeficientes de la columna pivote sean todos cero, excepto el que está sobre la fila pivote. En este caso a la fila F_0 se suma la nueva fila F_2 multiplicada por 10, a la fila F_3 se suma la nueva fila F_2 multiplicada por -2. Como resultado se obtiene la nueva tabla simplex mostrada en la tabla 4.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	0	0	5	0	60
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
F_3	x_5	0	3	0	0	-1	1	6

Tabla 4
Fuente: Propia.

Con base en lo anterior, y sabiendo que $x_1 = 0$ y $x_4 = 0$ tenemos que la nueva solución básica factible es $(0, 6, 4, 0, 6)$, correspondiendo a un valor de la función objetivo $Z = 60$.

En cuanto a la prueba de optimalidad sobre la última solución hallada, vemos que la nueva fila F_0 contiene un coeficiente negativo se concluye que la actual solución básica factible no es óptima.

❖ **Segunda iteración para mejorar la solución actual:** procediendo de manera similar a la anterior iteración, en este caso debemos seleccionar a x_1 como nueva variable básica, ya que es la que tiene el coeficiente más negativo en la fila F_0 (realmente es el único coeficiente negativo en este caso). Lo que da lugar a una nueva columna pivote.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	0	0	5	0	60
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
F_3	x_5	0	3	0	0	-1	1	6

Tabla 5

Fuente: Propia.

Determinamos la nueva fila pivote al aplicar la prueba del coeficiente mínimo, dividiendo cada valor del lado derecho en cada fila por el respectivo coeficiente en la columna pivote, encontrándose que la nueva fila pivote es la fila F_3, por tanto la variable básica saliente es x_5 y el número pivote es 3, estos elementos de las observaciones se resaltan en la tabla 6.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	0	0	5	0	60
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
F_3	x_5	0	3	0	0	-1	1	6

Tabla 6

Fuente: Propia.

Con base en lo anterior obtenemos la nueva tabla simplex de donde se obtendrá la nueva solución básica factible. En la nueva tabla x_1 será la variable básica entrante en remplazo de x_5. La nueva fila F_3 se obtiene mediante la división de la fila pivote F_3 por el número 3. A la fila F_0 se suma 6 veces la nueva fila F_3 y a la fila F_1 se resta la nueva fila F_3, el resultado se muestra en la tabla 7.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	0	0	0	3	2	72
F_1	x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
F_3	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

Tabla 7

Fuente: Propia.

Con las variables no básicas $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$ encontramos que la nueva solución básica factible es $(2, 6, 2, 0, 0)$, con la cual el valor de la función objetivo es $Z = 72$. En la tabla 2.7 vemos que no hay coeficientes negativos en la fila F_0, por tanto la solución es óptima, lo que significa que la solución del problema es $x_1 = 2, x_2 = 6$.

Si comparamos las formas algebraicas y tabular del Método Simplex, vemos que en esencia son equivalentes, sin embargo, la forma tabular facilita el trabajo. En adelante trabajaremos con base en la forma tabular en lugar de la forma algebraica, particularmente hallaremos a continuación la solución del problema 1.2.

Ejemplo 2.4: resolver el problema del ejemplo 1.2 presentado en la semana 1 mediante la forma tabular del Método Simplex.

Solución: el ejemplo se refiere a la necesidad de hallar los valores de x_1, x_2, x_3 correspondientes respectivamente a las cantidades de juegos de mesas, guardarropa y camas que se deben fabricar con el fin de obtener la mayor utilidad posible. El modelo que resulta, dado en la cartilla de la semana 1 es el siguiente:

$$Maximizar\ Z = Z = 60x_1 + 50x_2 + 40x_3$$

$$\begin{aligned}
&Sujeta\ a: \\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 180 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 300 \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 240 \\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

La aplicación del Método Simplex demanda la necesidad de introducir las variables de holgura x_4, x_5, x_6 para convertir en ecuación las inecuaciones correspondientes a las restricciones estructurales. El modelo ampliado es el siguiente:

$$Maximizar\ Z = 60x_1 + 50x_2 + 40x_3$$

$$\begin{aligned}
&Sujeta\ a: \\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\
&x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 300 \\
&2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 240 \\
&x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0
\end{aligned}$$

En este caso tenemos $m = 3$ restricciones estructurales y $n = 3$ variables de decisión, el modelo ampliado corresponde a un sistema de $m = 3$ ecuaciones y $m + n = 6$ variables, hay una diferencia de 3 entre el número total de variables y el de ecuaciones, lo que indica que el número de grados de libertad, que define la cantidad de variables no básicas es 3 (cuyo valor se elige arbitrariamente), con lo que las otras tres son variables básicas.

Al incluir como una nueva fila la expresión que involucra la función objetivo, el problema se convierte en:

$$
\begin{aligned}
Z - 60x_1 - 50x_2 - 40x_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 180 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 300 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 240 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

La tabla 8 muestra la fila de encabezados, la columna que indica cuales son las variables básicas y las columnas de coeficientes de todas las variables en las restricciones estructurales, también aparece resaltada la fila F_0. En el paso inicial se selecciona x_4, x_5 y x_6 como variables básicas, por consiguiente las no básicas son x_1, x_2 y x_3.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	-60	-50	-40	0	0	0	0
F_1	x_4	0	2	1	3	1	0	0	180
F_2	x_5	0	1	3	2	0	1	0	300
F_3	x_6	0	2	1	2	0	0	1	240

Tabla 8
Fuente: Propia.

Con $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ y sustituyéndolos en el sistema tenemos $x_4 = 180,\ x_5 = 300$ y $x_6 = 240$. Por lo tanto la solución básica inicial es $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 0,\ x_4 = 180, x_5 = 300$ y $x_6 = 240$ y el actual valor de la función objetivo sería $Z = 0$. Dado que la fila F_0 tiene coeficientes negativos la solución actual no es óptima y se requiere proceder con una iteración.

Primera iteración para mejorar la solución actual.

El coeficiente más negativo en la fila F_0 es el de la variable x_1, esta es entonces la variable básica entrante. En la tabla 9 se resalta la columna pivote.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	−60	−50	−40	0	0	0	0
F_1	x_4	0	2	1	3	1	0	0	180
F_2	x_5	0	1	3	2	0	1	0	300
F_3	x_6	0	2	1	2	0	0	1	240

Tabla 9

Fuente: Propia.

El estudiante puede observar que, dividiendo en cada fila el valor del lado derecho por el respectivo coeficiente en la columna pivote, encontramos que el menor coeficiente corresponde a la fila F_1, por lo tanto esta es la fila pivote y x_4 pasará a ser la variable básica saliente. En la tabla 10 se resalta la fila y la columna pivote y se ve que el número pivote es 2.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	−60	−50	−40	0	0	0	0
F_1	x_4	0	2	1	3	1	0	0	180
F_2	x_5	0	1	3	2	0	1	0	300
F_3	x_6	0	2	1	2	0	0	1	240

Tabla 10

Fuente: Propia.

La nueva tabla simplex (tabla 11) se obtiene mediante las siguientes operaciones:

- Registrar a x_1 como nueva variable básica en lugar de x_3.
- Dividir por 2 los valores en la fila pivote.
- Sumar a F_0 la nueva fila F_1 multiplicada por 60.
- Restar la nueva fila F_1 de la fila F_2.
- Restar de la fila F_3 dos veces la nueva fila F_1.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	0	-20	50	30	0	0	5400
F_1	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	90
F_2	x_5	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	210
F_3	x_6	0	0	0	-1	-1	0	1	60

Tabla 11
Fuente: Propia.

Con $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ se tiene $x_1 = 90, x_5 = 210, x_6 = 60$, lo que significa que la actual solución básica es $(90, 0, 0, 0, 210, 60)$, Esta solución no es óptima debido a que en la fila F_0 hay coeficientes negativos.

Segunda iteración para mejorar la solución actual
De la actual tabla simplex se seleccionar a x_2 como nueva variable básica, (tiene coeficiente negativo). Vemos en la tabla 12 la nueva columna pivote.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	0	-20	50	30	0	0	5400
F_1	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	90
F_2	x_5	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	210
F_3	x_6	0	0	0	-1	-1	0	1	60

Tabla 12
Fuente: Propia.

Dividiendo cada valor del lado derecho por el respectivo coeficiente en la columna pivote encontramos que F_2 es la nueva fila pivote, x_5 será la variable básica saliente y $\frac{5}{2}$. Es el número pivote. En la tabla 2.12 se resalta la fila y la columna pivote.

Para obtener la nueva matriz simplex, mostrada en la tabla 13, incluimos x_2 en la columna de variables básicas a cambio de x_5, que es la variable básica saliente. La nueva fila F_2 se obtiene multiplicando la actual por $\frac{2}{5}$ A la fila F_0 se suma 20 veces la nueva fila F_2 y a la fila F_1 se resta la nueva fila F_2 dividida por 2, el resultado se muestra en la tabla 13.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
F_0	Z	1	0	0	54	30	8	0	7080
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	0	48
F_2	x_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	84
F_3	x_6	0	0	0	-1	-1	0	1	60

Tabla 13
Fuente: Propia.

Con las variables no básicas $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$, la nueva solución básica factible es $(48, 84, 0, 0, 0{,}60)$, con la cual el valor de la función objetivo es $Z = 7080$. En la tabla 13 vemos que no hay coeficientes negativos en la fila F_0, por tanto la solución es óptima.

Observaciones relación con el proceso de solución
Al aplicar los procedimientos relacionados con el Método Simplex descritos en las secciones anteriores no hicimos referencia a los casos en que se presenta empate o igualdad en los valores que soportan la determinación de la variable básica entrante y/o la variable básica saliente.

La variable básica entrante se elige en función del coeficiente más negativo en la fila F_0 (la que contiene la función objetivo), sin embargo, si dos o más variables básicas coinciden en su valor, se puede elegir arbitrariamente la que será la variable básica entrante.

Si la igualdad se da entre los cocientes que definen la variable básica saliente, teóricamente se tiene que la elección podría tener un importante impacto en razón a que puede suceder lo siguiente: todas las variables asociadas con un mismo cociente llegarán a cero para un mismo valor de la variable básica entrante, de tal manera que existirán variables básicas con valor cero, a las que se les llama variables degeneradas, dando lugar a la solución básica factible con variables básicas degeneradas (Solución básica degenerada). Por otra parte, si alguna de las variables básicas degeneradas permanece con valor cero hasta ser elegida como variable básica saliente en otra iteración, la variable básica entrante también valor cero puesto que no se le permite su crecimiento sin que la saliente se haga negativa, y por consiguiente no cambia el valor de la función objetivo. Si Z no mejora, el método puede entrar en un ciclo repetitivo de una secuencia de soluciones, sin llegar a la solución óptima. En la práctica el tipo de problemas en que se da esta situación es muy raro, pero si se presentan se podría probar la salida de él cambiando la elección de la variable saliente.

Otra posibilidad existente en una iteración es el no poder seleccionar variable básica saliente debido a que la variable básica entrante puede crecer indefinidamente sin que alguna de las otras variables básicas llegue a ser cero o negativa, lo que significa que los coeficientes de la columna pivote son negativos o cero, lo que a su vez se relaciona con el ilimitado crecimiento del valor de la función objetivo. Esto realmente quiere decir que se ha cometido algún error, bien sea en la formulación del modelo o no haber tenido en cuenta información importante. Este tipo de situaciones no resuelta por el Método Simplex.

Finalmente existen casos de problemas que realmente tienen múltiples soluciones óptimas, es decir, diferentes valores de las variables de decisión que resultan en el mismo valor de la función objetivo, pero el Método Simplex finaliza al hallar la primera solución óptima. En estos casos en que de alguna forma se conoce de múltiples soluciones óptimas, puede tomarse la decisión con base en aspectos no considerados en el modelo. Vale la pena anotar que el mismo Método Simplex proporciona una forma de determinar si un problema tiene más de una solución. En efecto, lo hace con base en el hecho que si alguna de las actuales variables no básicas de la iteración que da la solución óptima tiene coeficiente cero en la fila F_0, se tiene que al aumentar su valor, no cambia el de la función objetivo, pero sí cambia el conjunto de soluciones básicas factibles que dan el mismo valor óptimo.

2

Unidad 2

Solución de problemas de Programación Lineal en forma no estándar

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Hasta este punto del desarrollo del curso de Investigación de operaciones I hemos incursionado en la introducción a la programación lineal, abordando de manera superficial los fundamentos algebraicos y aplicando los mismos a la solución de problemas dados en forma estándar. Sin embargo, en programación lineal es común encontrar problemas que no encajan en la forma estándar, dándose por ejemplo, situaciones en las que el objetivo es minimizar una función objetivo en lugar de buscar el máximo de otra, también se dan casos en que las restricciones corresponden a ecuaciones o inecuaciones en ambos sentidos, razón por la cual se hace necesario la introducción de variantes al Método Simplex con el fin de lograr lo que se pretende.

En esta semana nos disponemos a abordar algunos procedimientos que se debe ejecutar en la solución de problemas en forma no estándar, para lo cual se usara fundamentalmente dos métodos que contribuyen en ese propósito, estos métodos son el de la gran M y el de las dos fases.

U2

Metodología

Al igual que en las semanas anteriores, en esta semana se recomienda al estudiante la detallada lectura de esta cartilla, en la cual se trata las temáticas relacionadas con la solución de problemas de programación lineal dados en forma no estándar. Para la descripción de las técnicas aplicar se usa un enfoque práctico a través de la solución de ejercicios que pongan de manifiesto los procedimientos asociados a ellos. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el adecuado acercamiento a la comprensión de los temas requiere del apoyo de recursos adicionales aquí ofrecidos.

Dado que los desarrollos alrededor de los métodos a trabajar se basan en la forma tabular del Método Simplex, al igual que en las semana 2 se requiere las habilidades propias de los procedimientos de eliminación gaussiana, por lo que se insiste en la necesidad de afianzar el manejo de las mismas, remitirse a las lecturas complementarias donde se encuentra ejercicios resueltos. Se llama nuevamente la atención en el sentido de aprovechar los recursos de video, donde se trata, mediante la solución y explicación de ejercicios, la aplicabilidad de los temas bajo estudio.

Se recalca la importancia de desarrollar los ejercicios propuestos como ejercicios de repaso, de tal manera que pueda afrontar en mejores condiciones el desarrollo de los ejercicios propuestos en el taller de esta semana y por consiguiente en la presentación del quiz de evaluación.

Solución de problemas de Programación Lineal en forma no estándar

Modelos de programación lineal en forma no estándar

En la cartilla de la semana anterior enfrentamos la solución de problemas de programación lineal que obedecen el modelo estándar, es decir, en donde se pide maximizar la función objetivo, sujetas a restricciones de no negatividad y todas las restricciones estructurales se expresan mediante inecuaciones dadas por el signo $\leq$, es decir inecuaciones de la forma:

$$a_{i1}x_1 + \ a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

Sin embargo no todas las situaciones reales asociadas con problemas de programación lineal obedecen el modelo estándar. Ciertos problemas conducen a modelos en los que algunas restricciones se expresan mediante ecuaciones, inecuaciones con signos $\leq$, o con números negativos al lado derecho, por lo que se hace necesario el tratamiento de estos detalles con el fin de poder abordar la solución mediante el Método Simplex.

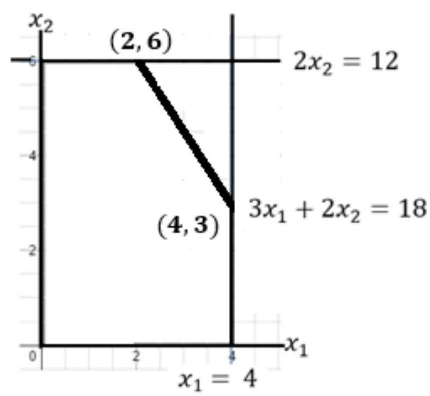
Manejo de modelos que incluyen restricciones en forma de ecuaciones. Método de la gran M

La principal diferencia en este caso, en cuanto al uso del Método Simplex, consiste en la determinación de la solución básica inicial. En estos casos se emplea una técnica que se basa en la introducción de una nueva variable, conocida como variable artificial, en los casos que sea necesario. La variable artificial introducida será la variable básica inicial en la respectiva ecuación que se introduzca y también debe satisfacer las restricciones de no negatividad. La función objetivo se modifica para que imponga una penalización exorbitante en el caso de que adquieran valores mayores que cero. Tal como veremos, el uso del Método Simplex hará que las variables artificiales tomen valores de cero a lo largo del desarrollo, luego de lo cual se tendrá la solución del problema original. Para comprender la forma de enfrentar este tipo de problemas consideremos el ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.1. Consideremos que en el problema de la empresa La Arenosa, introducida en el Ejemplo 1.1, se debe usar la totalidad de la capacidad de la planta Puente Aranda (ver enunciado y modelo del problema en la cartilla de la semana 1).

Solución: la modificación introducida trae cambios en la tercera restricción estructural de tal manera que esta es ahora una igualdad. Desde el punto de vista geométrico, lo anterior implica un significativo cambio en la región factible, en razón a que los posibles valores de las variables deben ser las coordenadas de puntos sobre el segmento de recta que une los puntos $(2,6)\ y\ (4,3)$. A continuación se muestra el nuevo modelo y la nueva región factible.

$$
\begin{aligned}
&Maximizar\ \ Z = 6x_1 + 10x_2\\
&Sujeta\ a: \quad
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & 4\\
2x_2 & \leq & 12\\
3x_1 + 2x_2 & = & 18\\
x_1 \geq 0;\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
\end{aligned}
$$



Según la forma del nuevo modelo, podemos ver la necesidad de introducir variables de holgura solo en las dos primeras restricciones, con lo cual el modelo ampliado queda como se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
Z - 6x_1 & - & 10x_2 & & & & & = & 0\\
x_1 & & & + & x_3 & & & = & 4\\
& & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 12\\
3x_1 & + & 2x_2 & & & & & = & 18
\end{array}
$$

La aplicación del Método Simplex en el caso de modelos en la forma estándar indica que la solución básica factible inicial correspondía al conjunto de valores tomados por las variables de holgura, consideradas como variables básicas, en este caso no contamos con variable de holgura en la tercera restricción, por lo cual no es posible establecer tal solución inicial como antes.

Para obtener una solución inicial básica factible, modificamos el sistema ampliado asociado con el problema, de tal forma que se introduce en la tercera restricción la variable artificial $x_{5a} \geq 0$ y se establece una penalización a la función objetivo, esta penalización consiste en una disminución de la función objetivo en un valor dado por Mx_{5a}, siendo M un número muy grande, la idea buscar que en realidad tal penalización no exista, lo que se logra solo si se consigue que la variable artificial al final valga 0, es por ello que la técnica que se aplica, en asocio con el Método Simplex, se conoce como método de la gran M. El correspondiente sistema de ecuaciones modificado, al que podemos llamar sistema artificial ampliado se formula como sigue:

$$
\begin{aligned}
Z - 6x_1 - 10x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + Mx_{5a} &= 0 \\
x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= 4 \\
2x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad\quad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_{5a} &= 18
\end{aligned}
$$

Paso inicial: tomando como variables no básicas iniciales la pareja x_1, x_2 (por consiguiente valen 0), se llega a la solución básica factible inicial $x_3 = 4, x_4 = 12$, $x_{5a} = 18$. La forma tabular es la siguiente:

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	M	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_{5a}	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 1

Fuente: Propia.

Dado que el procedimiento de la forma tabular del Método Simplex requiere que los coeficientes de las variables básicas en la fila F_0 sean cero, aplicamos el ajuste algebraico necesario a partir de la tabla anterior, para que el coeficiente de x_{5a} el cual consiste en remplazar la fila F_0 por la diferencia $F_0 - MF_3$, obteniéndose como resultado la tabla 2, de tal tabla se ve que la solución básica asociada no es óptima debido a la permanencia de coeficientes negativos en la fila F_0, por lo que se necesita aplicar los conocidos pasos del Método Simplex para hallar la mejor solución.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	$-(3M+6)$	$-(2M+10)$	0	0	0	$-18M$
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_{5a}	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 2
Fuente: Propia.

Primera iteración: al aplicar el criterio de selección de la variable básica entrante vemos, en la tabla 2, que para grandes valores de $M, 3M+6$ es mayor que $2M+10$, con lo cual el coeficiente más negativo en la fila F_0 es el de la variable x_1, por tanto esta será la variable básica entrante. Al dividir los valores del lado derecho en las filas F_1 y F_4, por el correspondiente coeficiente de x_1, se obtiene cocientes de 4 y 6 respectivamente, lo que lleva a elegir a x_3 como la variable básica saliente. En la tabla 3 se resalta la columna y la fila pivote.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	$-(3M+6)$	$-(2M+10)$	0	0	0	$-18M$
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_{5a}	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 3. Datos de la primera iteración resaltando columna y fila pivote
Fuente: Propia.

En la tabla 4 ahora x_1 remplaza a x_3 como variable básica, la fila F_0 se remplaza por el resultado de la operación $F_0 + (3M+6)F_1$, mientras que la fila F_3 se remplaza por el resultado de restar a F_3 la nueva fila F_1 multiplicada por 3.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	0	$-(2M+10)$	$3M+6$	0	0	$-6M+24$
F_1	x_1	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_{5a}	0	0	2	-3	0	1	6

Tabla 4. Datos de la segunda iteración
Fuente: Propia.

Cualquiera sea la solución que se derive de la tabla 4 no es óptima porque hay coeficientes negativos en la fila F_0. Se requiere una nueva iteración.

Segunda iteración: al acometer una nueva iteración, a partir del signo de los coeficientes en la fila F_0 en la tabla 4, se encuentra que la variable básica entrante es x_2, que la fila pivote es F_3 y por tanto la variable artificial x_{5a} es la variable básica saliente.

La tabla 5 es la nueva tabla simplex, que se obtiene cambiando a x_2 como variable básica en lugar de x_{5a} y realizando las habituales operaciones sobre las filas.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	0	0	-9	0	$M+5$	54
F_1	x_1	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	0	3	1	-1	6
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

Tabla 5
Fuente: Propia.

La solución que se obtenga de la tabla 5 no puede ser óptima porque aún hay un coeficiente negativo en la fila F_0, este es el correspondiente a la variable x_3, por tanto se realiza una nueva iteración.

Tercera iteración: debido a que tiene el coeficiente más negativo (realmente es la única) en la fila F_0, x_3 es la nueva variable básica entrante. La aplicación del criterio de cociente mínimo indica que la variable básica saliente es x_4. La tabla 6 es la nueva tabla simplex, que se obtiene aplicando los habituales procedimientos. Dado que no hay coeficientes negativos en la fila F_0, se llega a la conclusión que la última solución es óptima. La solución corresponde a $(2, 6, 2, 0, 0)$ la cual da como valor objetivo $Z = 72$.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_{5a}	b_i
F_0	Z	1	0	0	0	3	$M+2$	72
F_1	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
F_2	x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
F_3	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

Tabla 6
Fuente: Propia.

El ejemplo anteriormente desarrollado, en el que interviene una restricción dada en forma de igualdad, el lado derecho es un número positivo. Frente a restricciones en forma de igualdad con un número negativo, primero se multiplica la ecuación por menos uno (-1) y luego se aplica el mismo procedimiento anterior. El estudiante debe revisar las lecturas complementarias y video capsulas de esta semana, donde se ilustra la solución de ejemplos que tratan este tipo de situaciones.

En situaciones de desigualdad con valor negativo en el lado derecho también se multiplica por menos uno cada lado de la inecuación, con lo cual se invierte el sentido de la desigualdad.

Manejo de modelos de la forma $\geq$

El tratamiento dado a modelos en los que aparecen restricciones estructurales en forma de inecuaciones con el sentido de la forma $\geq$ se aborda en esta sección mediante la solución del siguiente ejemplo, el que también incluye una restricción de igualdad y una inecuación con el sentido $\leq$:

Ejemplo 3.3. Resolver el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &Minimizar: Z = 8x_1 + 10x_2 \\ &Sujeta\ a: \\ &6x_1 + 2x_2 \leq 27 \\ &x_1 + x_2 = 12 \\ &3x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solución la abordamos inicialmente agregando una variable de holgura x_3 a la primera restricción (por estar dada originalmente en la forma de ecuación en el sentido ≤), a la segunda restricción se agrega una variable artificial x_{4a} (por estar dada originalmente en forma de ecuación). El tratamiento que damos a la tercera restricción $(3x_1 + 2x_2 \geq 30)$ inicialmente consiste en restar una cantidad de exceso o variable de exceso x_5, y luego sumarle una variable artificial x_{6a}. Sumando en este caso las respectivas penalizaciones a la función objetivo por efecto de la incorporación de las variables artificiales y tratarse de un problema de minimización. El nuevo modelo o problema artificial queda como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} &Minimizar: \quad Z = 8x_1 + 10x_2 + Mx_{4a} + Mx_{6a} \\ &Sujeta\ a: \\ &6x_1 + 2x_2 + x_3 = 54 \\ &x_1 + x_2 + x_{4a} = 12 \\ &3x_1 + 2x_2 + \quad - x_5 + x_{6a} = 30 \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0; x_{4a} \geq x_5 \geq 0; x_{6a} \geq 0 \end{aligned}$$

En lo que respecta a la función objetivo, dado que se pide su minimización, se puede convertir en un problema de maximización al considerar el opuesto de la función original, es decir, si el problema es minimizar Z, nos enfocamos en resolver el problema maximizar $-Z$. Con esta última consideración el problema queda en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &Maximizar: \quad -Z = -8x_1 - 10x_2 - Mx_{4a} - Mx_{6a} \\ &Sujeta\ a: \\ &6x_1 + 2x_2 + x_3 = 54 \\ &x_1 + x_2 + x_{4a} = 12 \\ &3x_1 + 2x_2 + \quad - x_5 + x_{6a} = 30 \\ &x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0; x_{4a} \geq x_5 \geq 0; x_{6a} \geq 0 \end{aligned}$$

Para efectos de preparación de tal forma que usemos la forma tabular del Método Simplex, reescribimos el problema para obtener el sistema mostrado a continuación.

$$\begin{aligned}
-Z + 8x_1 + 10x_2 \qquad\quad + Mx_{4a} \qquad\quad + Mx_{6a} &= 0 \\
6x_1 + \quad 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 54 \\
x_1 + \quad x_2 \qquad + \quad x_{4a} \qquad\qquad\qquad &= 12 \\
3x_1 + \quad 2x_2 + \qquad\qquad\quad - x_5 + \quad x_{6a} &= 30
\end{aligned}$$

Atendiendo al hecho que hay en total seis variables y tres ecuaciones de restricciones podemos seleccionar tres variables no básicas y tres básicas. Se toma el trio x_3, x_{4a}, x_{6a} como variables básicas. En esta fase de preparación podemos ver que el sistema no se encuentra aún en la forma requerida para aplicar la forma tabular del Método Simplex, esto en razón a la presencia de las variables básicas x_{4a}, x_{6a} en la fila F_0 que contiene la función objetivo Z, para eliminarlas F_0 multiplicamos por $-M$ las filas F_2 y F_3 y sumamos los resultados a F_0, como se ilustra a continuación:

Con esta transformación la tabla inicial es la siguiente:

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	$-4M+8$	$-3M+10$	0	0	M	0	$-42M$
F_1	x_3	0	6	2	1	0	0	0	54
F_2	x_{4a}	0	1	1	0	1	0	0	12
F_3	x_{6a}	0	3	2	0	0	-1	1	30

Tabla 7

Fuente: Propia.

Teniendo en cuenta que M es un valor muy grande, la solución básica inicial que se obtenga de la tabla anterior no puede ser óptima porque hay valores negativos en la fila F_0. Para una nueva iteración vemos que el coeficiente más negativo en F_0 es el de la variable x_1, por tanto esta es la variable básica entrante, al aplicar la prueba de cociente mínimo se tiene que la variable básica saliente es x_3. La figura muestra la tabla resaltando la fila y la columna pivote.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	$-4M+8$	$-3M+10$	0	0	M	0	$-42M$
F_1	x_3	0	6	2	1	0	0	0	54
F_2	x_{4a}	0	1	1	0	1	0	0	12
F_3	x_{6a}	0	3	2	0	0	-1	1	30

Tabla 8

Fuente: Propia.

Las operaciones para obtener una mejor solución básica factible son: incluir x_1 como variable básica en lugar de x_3, dividir por 6 la fila F_1, restar a F_0 la nueva fila F_1multiplicada por $(-4M+8)$, restar a F_2 la nueva fila F_1, restar a F_3 la nueva fila F_1 multiplicada por 3, lo que da como resultado la siguiente tabla 9.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	$\frac{-5M+22}{3}$	$\frac{2M-}{3}$	0	M	0	$-6M-72$
F_1	x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	9
F_2	x_{4a}	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	3
F_3	x_{6a}	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	3

Tabla 9

Fuente: Propia.

La solución que puede derivarse de la última tabla no es óptima porque aún hay coeficientes negativos en la fila F_0, por tanto se requiere una nueva iteración, en la cual la nueva variable básica entrante es x_2 y la saliente es x_{6a} ¿Por qué? La tabla 10 es la nueva tabla simplex. La respuesta a la pregunta y la deducción de la tabla se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	0	$\frac{-M+14}{6}$	0	$\frac{-2M+22}{3}$	$\frac{5M-22}{3}$	$-M-94$
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
F_2	x_{4a}	0	0	0	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	3

Tabla 1

Fuente: Propia.

La presencia de coeficientes negativos en F_0 obliga a una nueva iteración con x_5 como variable básica entrante y x_{4a} como saliente. Las usuales operaciones conducen a la tabla 11 como nueva tabla simplex, la deducción de la tabla 11 a partir de la tabla 10 se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	0	$\frac{1}{2}$	$M-11$	0	M	-105
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{15}{2}$
F_2	x_5	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{9}{2}$

Tabla 11

Fuente: Propia.

Con grandes valores de M los coeficientes en F_0 son no negativos, por tanto la solución que sale de la tabla 11 es la solución óptima, en la cual las variables no básicas x_3, x_{4a} y x_{6a} toman valor cero, y por tanto las variables básicas toman los valores:

$$x_1 = \frac{15}{2} = 7{,}5\ ;\ x_2 = \frac{9}{2} = 4{,}5\ ;\ x_5 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

De donde se tiene que $-Z = -105\ o\ Z = 105$. Con esta parte terminamos el tratamiento del problema mediante el uso del método de la gran M. a continuación veremos un método alternativo conocido como el método de las dos fases.

Método de las dos fases

Aplicando el procedimiento basado en grandes valores de M, las soluciones factibles se dan cuando se logra que las variables artificiales sean cero, sin que necesariamente se haya llegado a una solución óptima. En el ejemplo 3.3 se dio el caso que la primera solución factible (en que las variables artificiales son cero) también era la solución óptima (porque no había coeficientes negativos en la fila F_0), sin embargo existen casos en que luego de hacer cero las variables artificiales se requiere más iteraciones que lleven a una óptima solución a partir de la primera solución factible.

De estas afirmaciones podemos deducir que, en los casos generales, este procedimiento consta de dos fases: una en la que inicialmente se hacen cero las variables artificiales y otra en la que con los pasos básicos del Método Simplex se obtiene la solución óptima. Esto da lugar al método de las dos fases, que de forma directa haya la solución sin necesidad de considerar explícitamente grandes valores de *M*. El método de las dos fases se ilustra mediante el ejemplo 3.4 a partir del mismo problema del ejemplo 3.3.

Ejemplo 3.4. Usar el método de las dos fases para resolver el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{aligned}
&Minimizar: Z = 8x_1 + 10x_2\\
&Sujeta\ a:\\
&6x_1 + 2x_2 \leq 54\\
&x_1 + x_2 = 12\\
&3x_1 + 2x_2 \geq 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Tal como en el ejemplo 3.3 agregamos una variable de holgura x_3 a la primera restricción, a la segunda se agrega la variable artificial x_{4a}, a la tercera restricción restamos la variable de exceso x_5 y sumamos la variable artificial x_{6a}. En la primera fase se debe resolver el problema de minimizar la función objetivo artificial dada por: $Z_a = x_{4a} + x_{6a}$ sujeta al conjunto de restricciones modificadas, con lo cual el problema en la fase uno es:

$$
\begin{aligned}
&Minimizar:\ Z = x_{4a} + x_{6a}\\
&Sujeta\ a:\\
&6x_1 + 2x_2 + x_3 = 54\\
&x_1 + x_2 + x_{4a} = 12\\
&3x_1 + 2x_2 + \quad - x_5 + x_{6a} = 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0; x_{4a} \geq x_5 \geq 0; x_{6a} \geq 0
\end{aligned}
$$

El problema de maximización equivalente es:

$$
\begin{aligned}
&Maximizar:\ -Z = - x_{4a} - x_{6a}\\
&Sujeta\ a:\\
&6x_1 + 2x_2 + x_3 = 54\\
&x_1 + x_2 + x_{4a} = 12\\
&3x_1 + 2x_2 + \quad - x_5 + x_{6a} = 30\\
&x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0; x_{4a} \geq x_5 \geq 0; x_{6a} \geq 0
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones que resulta, sobre el cual se aplica el Método Simplex es:

$$
\begin{aligned}
&F_0:\ -Z + x_{4a} + x_{6a} = 0\\
&F_1:\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 54\\
&F_2:\ x_1 + x_2 + x_{4a} = 12\\
&F_3:\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_{6a} = 30
\end{aligned}
$$

Al igual que en el ejemplo 3.3, se toma el trio x_3, x_{4a}, x_{6a} como variables básicas. El sistema no está en la forma requerida para aplicarle la forma tabular del Método Simplex, debido a que aparecen las variables básicas x_{4a}, x_{6a} en F_0, para eliminarlas sustituimos F_0 por el resultado obtenido de $F_0 - F_2 - F_3$ como se ilustra a continuación:

$$
\begin{array}{r|cccccccl}
F_0: & -Z & & & + & x_{4a} & & + & x_{6a} = 0 \\
-F_2: & & -x_1 & -x_2 & & -x_{4a} & & & =-12 \\
-F_3: & & -3x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & & -x_{6a} = -30 \\
\hline
F_0-F_2-F_3 & -Z & -4x_1 & -3x_2 & & & +x_5 & & = -42
\end{array}
$$

Con esta transformación la tabla inicial es la siguiente:

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	-4	-3	0	0	1	0	-42
F_1	x_3	0	6	2	1	0	0	0	54
F_2	x_{4a}	0	1	1	0	1	0	0	12
F_3	x_{6a}	0	3	2	0	0	-1	1	30

Tabla 12
Fuente: Propia.

La solución para el mejor valor de la Z artificial dada por la tabla no es óptima, siguiendo los procedimientos asociados con el Método Simplex tabular, se requiere una iteración para hallar una mejor. El coeficiente más negativo en F_0 es el de la variable x_1, que será la variable básica entrante, mientras que la variable básica saliente es x_3. La tabla 13 es la nueva tabla simplex obtenida a partir de la tabla 12, se deja al estudiante como ejercicio de repaso la deducción de esta tabla.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	0	-6
F_1	x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	9
F_2	x_{4a}	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	3
F_3	x_{6a}	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	3

Tabla 13
Fuente: Propia.

La solución que resulta de la tabla 13 no es óptima. En la siguiente iteración la nueva variable básica entrante es x_2 y la saliente es x_{6a}. El resultado de la operaciones da la nueva tabla simplex (tabla 14)

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
F_2	x_{4a}	0	0	0	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	3

Tabla 14
Fuente: Propia.

Se requiere una nueva iteración en la que la variable básica entrante es x_5 y la saliente es x_{4a}.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_{4a}	x_5	x_{6a}	b_i
F_0	Z	-1	0	0	0	1	0	1	0
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{15}{2}$
F_2	x_5	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	-1	$\frac{3}{2}$
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{9}{2}$

Tabla 15
Fuente: Propia.

Aquí se llega a la solución óptima para la función objetivo artificial $Z = x_{4a} + x_{6a} = 0$ para la cual se tiene que $x_1 = \frac{15}{2} = 7{,}5$; $x_2 = \frac{9}{2} = 4{,}5$; $x_5 = \frac{3}{2} = 1{,}5$, que constituyen una solución factible del problema original.

Continuamos ahora con la fase 2. Esta fase se prepara a partir de la tabla final de la fase 1 (tabla 14) eliminando las columnas de las variables artificiales x_{4a} y x_{6a}, con lo que se obtiene la tabla 3.16:

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
F_0	Z	-1	8	10	0	0	0
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{15}{2}$
F_2	x_5	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{2}$

Tabla 16. Resulta eliminando las columnas de variables artificiales de la tabla final de fase y sustituyendo la función objetivo por la original
Fuente: Propia.

Para finalizar la fase 2 se requiere primero reajustar el sistema de tal manera que los coeficientes de las actuales variables básicas sean cero en la fila F_0, para ello obtenemos una nueva tabla a partir de la tabla 15 restando 8 veces la fila F_1 y 10 veces la fila F_3 a la fila F_0, el resultado es la tabla 17.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_5	b_i
F_0	Z	-1	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	-105
F_1	x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{15}{2}$
F_2	x_5	0	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
F_3	x_2	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{2}$

Tabla 17. reajuste del sistema para finalizar la fase
Fuente: Propia.

Dado que en esta última tabla no hay coeficientes negativos, la solución que se deriva de aquí es la solución óptima y coincide con la hallada mediante el método de la gran M. es posible que en otros problemas se deba realizar iteraciones adicionales para llegar a la solución óptima.

2

Unidad 2

Forma matricial del Método Simplex y Método Simplex revisado

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Si nos correspondiera resumir lo trabajado hasta este momento, en el curso de Investigación de operaciones I, podríamos indicar que lo más práctico ante la necesidad de resolver un problema de programación lineal dado en forma estándar es abordarlo mediante la forma tabular del Método Simplex, mientras que para el caso de problemas en forma no estándar se hace necesario la variante consistente en el método de la gran M o en el método de las dos fases.

En esta cartilla, correspondiente a la semana 4 del curso, presentaremos la forma matricial del Método Simplex, frente a lo cual se hace necesario el manejo de operaciones básicas de algebra lineal relacionadas con operaciones con vectores y matrices, particularmente aquella que tiene que ver con el cálculo de la inversa de una matriz. Veremos que a partir de la representación tabular inicial podemos indicar la correspondiente representación matricial, y como hallar la representación matricial de iteraciones posteriores hasta llegar a la que arroje la solución óptima del problema. Abordaremos el caso de problemas dados en forma estándar, asumiendo que se tiene las bases y habilidades requeridas para resolver algunos de aquellos que estén dados en otra forma. En el uso del Método Simplex en forma matricial se pondrá de manifiesto la necesidad de calcular la inversa de una matriz, a la que se llama matriz base, frente a lo cual, si bien es cierto esto no es un gran obstáculo, siempre quisiéramos evitar.

El Método Simplex revisado se basa en la forma matricial, pero presenta la ventaja que evita la necesidad de hallar explícitamente la inversa de una matriz. Esta cartilla finaliza con el tratamiento de este método y se muestra su aplicabilidad mediante la solución de un problema básico.

U2

Metodología

A estas alturas del desarrollo debería sobrar la recomendación de cuidadosa lectura de la cartilla, sin embargo se hace ver nuevamente que esta es el punto de partida y referencia permanente en el desarrollo del curso en la semana. La descripción de principios aquí abordados usa el enfoque basado en la solución de ejercicios en los que se aplique los procedimientos asociados a ellos, pero se ha de tener en cuenta que el mejor acercamiento a la comprensión de los temas hace necesario el apoyo de recursos adicionales aquí planteados.

Puesto que buena parte de la temática a trabajar alrededor de la forma matricial del Método Simplex se basan, lógicamente en operaciones con vectores y matrices, requiere que el estudiante afiance las habilidades propias del manejo de este tipo de operaciones, en este punto es importante remitirse a las lecturas complementarias donde se encuentra ejercicios resueltos. Se llama nuevamente la atención sobre la necesidad de aprovechamiento de los videos propuestos, donde se trata, mediante la solución y explicación de ejercicios, la aplicabilidad de los temas que estudiamos.

El desarrollo de los ejercicios de repaso resulta de vital importancia en el proceso de preparación para afrontar, en mejores condiciones, el desarrollo del parcial que ha de desarrollarse esta semana.

Forma matricial del Método Simplex y Método Simplex revisado

Forma matricial del Método Simplex

Dado que ya hemos trabajado el Método Simplex en forma tabular puede resultar fácil pasar a la forma matricial, en este punto es conveniente que el estudiante tenga presente la necesidad de repasar los elementos de algebra lineal relacionados con vectores y matrices.

Consideremos el modelo general de un problema de programación lineal en forma estándar presentado en la cartilla dela semana 1.

$$Maximizar: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{ll} sujeta\ a: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0 \end{array}$$

Para llegar a la representación matricial del modelo sea un vector fila $\boldsymbol{c}$ compuesto por los n coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ presentes en la función objetivo, $\boldsymbol{x}$ un vector columna compuesto por las n variables de decisión $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\boldsymbol{A}$ la matriz de coeficientes de las restricciones estructurales, $\boldsymbol{b}$ el vector columna de los m valores de lado dercho $b_1, b_2, \ldots, b_m$ y **0** (cero en negrilla) un vector de n componentes todas igual acero, es decir:

$$\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n];\ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con lo anterior, basados en el producto de vectores y matrices, encontramos que la función objetivo puede representarse mediante $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{cx}$, el conjunto de restricciones estructurales se representa como $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ y las restricciones de no negatividad como $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$**,** con lo cual la forma matricial del problema es:

$$\begin{gathered} Maximizar: \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{cx} \\ Sujeta\ a: \\ \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{gathered}$$

Ante la necesidad de convertir las inecuaciones en ecuaciones se introduce variables de holgura, una por cada restricción estructural, requiriéndose el vector columna $\boldsymbol{x_h}$ compuesto por las m variables de holgura $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ y transformando la representación algebraica del modelo según se muestra seguidamente.

$$Maximizar\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ \dots + c_nx_n \qquad Sujeto\ a:$$

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & + \boldsymbol{x_{n+1}} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & & + \boldsymbol{x_{n+2}} & & = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & & & + \boldsymbol{x_{n+m}} & = b_1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; \dots x_n \geq 0;\ x_{n+1} \geq 0; \ \cdots x_{n+m} \geq 0$$

En esta representación se destaca la disposición de las variables de holgura, y se puede ver que estos elementos, en el recuadro verde, corresponden al producto de la matriz identidad de orden m y el vector de variables de holgura $\boldsymbol{x_h}$**,** de esta manera la matriz $\boldsymbol{A}$ se amplía en la matriz identidad y el sistema ampliado de restricciones se expresa mediante:

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_h} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b} \ \ y \ \ \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x_h} \end{bmatrix} \geq 0$$

Hallar una solución básica factible en la representación matricial

El proceso para hallar una solución básica factible, habiendo identificado las variables básicas y no básicas, corresponde a la solución del sistema de ecuaciones anterior, con la condición que las variables no básicas sean iguales a cero, en el proceso para llegar a ello, y de acuerdo con los procedimientos estudiados previamente e ilustrados en los ejemplos trabajados hasta aquí, se podría eliminar del sistema de ecuaciones de restricciones $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}]$, las columnas de coeficientes de variables no básicas, obteniéndose una matriz $\boldsymbol{B}$ de coeficientes de las actuales variables básicas, si además $\boldsymbol{x_B}$ es el actual vector variables, la solución básica factible es la solución de del sistema:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{b}$$

A la luz de los principios de álgebra lineal, siendo $\boldsymbol{B}$ una matriz invertible, la solución básica actual $\boldsymbol{x_B}$ corresponde a:

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B^{-1}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B^{-1}}\boldsymbol{b}$$

Si además de lo anterior, denotando con $\boldsymbol{c_B}$ el vector de coeficientes de las variables básicas en la función objetivo (incluyendo los ceros de las variables de holgura). El valor de la función objetivo correspondiente a esta solución básica está dado por:

$$Z = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B^{-1}}\boldsymbol{b}$$

Ejemplo de uso de la representación matricial del Método Simplex

Para mostrar la valides de la forma matricial del Método Simplex consideremos a continuación el problema de la empresa la Arenosa. El problema consiste en:

$$Maximizar\ \ Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeta\ a:$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad &\leq \ \ 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Al incorporar las variables de holgura x_3, x_3, x_3, el problema se transforma en:

$$Maximizar \;\; Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeta \; a:$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + \;\; x_3 \quad\quad\quad\quad &= \;\; 4 \\ 2x_2 \quad\quad + \;\; x_4 \quad\quad &= 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad\quad + \;\; x_5 &= 18 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0; \;\; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$$

Según las definiciones asociadas con la forma matricial tememos:

$$c = [6, 10]; \;\; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x_h} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \;\; [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Con base en los procedimientos de solución y resultados presentados en el ejemplo 2.3 y las expresiones planteadas anteriormente en relación con la forma matricial, la secuencia de soluciones básicas factibles son las siguientes:

En el paso inicial:

$$c = [6, 10]; \;\; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \boldsymbol{x_h} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \;\; [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{c_B} = [0, 0, 0]$$

Por tanto:

$$Z = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

En la primera iteración:

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \; \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0, 10, 0]$$

Por tanto:

$$Z = [0,10,0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 60$$

En la segunda iteración:

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0, 10, 6]$$

Por tanto:

$$Z = [0,10,6] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 72$$

Lo anteriormente presentado, verificación de los resultados del ejemplo resuelto, evidencia la consistencia de la forma matricial del Método Simplex como forma alternativa de representación y solución de problemas de programación dados en forma estándar.

Forma matricial de cualquier iteración

Para analizar lo concerniente a la representación matricial del sistema de ecuaciones en cualquiera de las iteraciones consideremos la tabla inicial de la forma tabular del método simple en el caso del ejemplo de la empresa la Arenosa, a continuación resaltamos en la tabla 1 un conjunto de bloques que resultan de interés para la discusión.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	0	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_5	0	3	2	0	0	1	18

Tabla 1
Fuente: Propia.

Se puede observar, a partir de la tabla 1, que esta se puede representar mediante la siguiente ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \quad \textit{ecuación matricial (de la tabla inicial)}$$

A partir de esta representación matricial inicial se puede hallar la representación respectiva de cualquier iteración, el resultado de proceso correspondiente a las habituales operaciones algebraicas sobre filas se logran mediante la multiplicación por la izquierda de ambos lados de la ecuación matricial por una matriz apropiada. Para saber cuál es tal matriz tengamos en cuenta las expresiones $\mathbf{x}_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ y $Z = \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, tratadas en la sección 4.x, a partir de las cuales expresamos un nuevo vector compuesto por estos dos elementos, a continuación se muestra este vector y la equivalencia como el producto de una matriz y un vector.

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Ahora multiplicamos por la izquierda cada lado de la ecuación matricial inicial por la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{c} & 0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ 0 & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_b\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

Síntesis del Método Simplex en forma matricial

A manera de resumen del uso del Método Simplex en forma tabular presentamos la siguiente secuencia de pasos:

- **Procedimiento de inicio:** a partir del problema dado en forma estándar se introduce las variables de holgura, con ello se define el vector $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ compuesto por el conjunto de variables básicas de esta parte inicial, el vector $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}$ compuesto por los coeficientes de las variables básicas iniciales y las matrices $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^{-1}$ (en el inicio $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}$). En este mismo paso se verifica si se cumple la prueba de optimalidad, en la que todos los coeficientes de las variables no básicas deben ser no negativos.
- **Procedimientos iterativos:**
  - Paso 1 de iteración: identificar la variable básica entrante atendiendo al coeficiente más negativo de las variables no básicas en la anterior iteración.
  - Paso 2 de iteración: identificar la variable básica saliente atendiendo al criterio de coeficiente mínimo en la anterior iteración. En este caso se debe tener en cuenta que el producto $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ (para el caso de las variables de decisión originales y $\boldsymbol{B}^{-1}$ (para las variables de holgura) permiten hallar los coeficientes de la variable básica entrante. Por otro lado, el resultado de $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ permite establecer los valores del lado derecho del sistema de ecuaciones.
  - Paso 3 de iteración: identificación de la actual solución básica factible. La matriz $\boldsymbol{B}$ se actualiza sustituyendo la columna de coeficientes de la variable básica saliente por la respectiva columna en la matriz ampliada $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}]$ de la variable básica que entra.
- **Prueba de optimalidad:** se debe determinar los coeficientes de las variables no básicas en la fila de la función objetivo, para ello se debe ubicar los de las variables originales en $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1} - \boldsymbol{c}$ y los de las variables de holgura en $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}$**.** Se sabe que si los coeficientes de las variables no básicas son no negativos, la solución básica factible actual es la solución óptima, de lo contrario se debe realizar una nueva iteración.

Aplicaremos a continuación la forma matricial del Método Simplex para resolver el problema de asignación de recursos de la empresa La Arenosa.

Ejemplo 4.2: resolver el problema de la empresa La Arenosa mediante la forma matricial del Método Simplex.

Solución:
El enunciado del problema original es:

$$\begin{array}{l} Maximizar\ \ Z = 6x_1 + 10x_2 \\ Sujeta\ a: \\ \\ x_1 \qquad\quad \leq\ \ 4 \\ \qquad\ \ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Al incorporar las variables de holgura x_3, x_4, x_5, el problema se transforma en:

$$Maximizar\ \ Z = 6x_1 + 10x_2$$

$$Sujeta\ a:$$

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & & + & x_3 & & & = 4 \\ & 2x_2 & & + & x_4 & & = 12 \\ 3x_1 & + 2x_2 & & & + & x_5 & = 18 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0$$

Del nuevo sistema se deduce que:

$$c = [6, 10];\ [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Procedimiento de inicio: se selecciona las variables de holgura como variables básicas iniciales, entonces:

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0, 0, 0];\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar que la solución que sale de aquí no es óptima se observa que:

$$\boldsymbol{c_b B^{-1} A} - \boldsymbol{c} = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [6, 10] = [-6, -10]$$

Como entre los coeficientes que resultan hay valores negativos, la solución no es óptima.

Primera iteración:

- Paso 1 de la primera iteración: el cálculo $\boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c} = [-6, -10]$ en la prueba de optimalidad del procedimiento de inicio indica que el coeficiente de la variable no básica x_2 es el más negativo (-10), por lo tanto x_2 es la variable básica entrante.
- **Paso 2 de la primera iteración:** Los coeficientes de x_2 en las restricciones corresponden a la segunda columna del producto $\boldsymbol{B^{-1} A}$**,** este producto es:

$$\boldsymbol{B^{-1} A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

  Por otro lado, los valores del lado derecho están dados por el vector $\mathbf{x}_B$ inicial, cuyos componentes son $4, 12\ y\ 18$, al dividir estos valores por los respectivos coeficientes positivos de x_2 y aplicar la prueba de cociente mínimo se llega a que la variable saliente es x_4 $(\frac{12}{2} = 6;\ \frac{18}{2} = 9)$.

- Paso 3 de la primera iteración: se actualiza la matriz $\boldsymbol{B}$ sustituyendo la columna de coeficientes de x_4 por la columna de coeficientes de x_2, teniéndose entonces que $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B^{-1}}$, $\mathbf{x_B}$, $\boldsymbol{c_B}$**,** son:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0,10,0]$$

Prueba de optimalidad: el conjunto de variables no básicas está formado ahora por x_1 y x_4, por ser x_1 una variable original, de $\boldsymbol{c_B B^{-1} A - c}$ obtenemos su coeficiente en la función objetivo, el producto es:

$$\boldsymbol{c_b B^{-1} A - c} = [0,10,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [6,10] = [-6,-5]$$

Por tanto el coeficiente de x_1 es -6, mientras que, por ser x_4 una variable de holgura, del producto $\boldsymbol{c_B B^{-1} A}$ obtenemos su coeficiente en la función objetivo, el producto es:

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [0,10,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0,5,0]$$

Por tanto el coeficiente de x_4 es 5. Como el coeficiente de x_1 es negativo la actual solución que de aquí surja no es óptima.

Segunda iteración

- **Primer paso de la segunda iteración:** de la iteración anterior se deduce que la variable básica entrante es x_1.
- **Segundo paso de la segunda iteración**: los coeficientes de $x_1$en las restricciones se hallan de la primera columna del producto $\boldsymbol{B^{-1}A}$**,** el producto es:

$$\boldsymbol{B^{-1}A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

  Los valores de $\mathbf{x}_B$ en la anterior iteración son $4, 6\ y\ 6$, lo que junto a la prueba de cociente mínimo indica que la variable saliente es x_5.

- **Paso 3 de la segunda iteración:** la actualización de $\boldsymbol{B}$ sustituyendo la columna de coeficientes de x_5 por la de coeficientes de x_1, permite hallar los siguientes elementos.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0,10,6]$$

Prueba de optimalidad de la segunda iteración: las variables no básicas ahora son x_4 y x_5, por ser variables de holgura, sus coeficientes en la función objetivo se obtienen del producto $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$:

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [0,10,6] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0,3,2]$$

Entonces el coeficiente de x_4 es 3 y el de x_5 es 2, ninguno de los dos es negativo, por lo tanto la solución que de aquí se obtenga es la solución óptima, los valores de las variables son entonces: $x_1 = 2;\ x_2 = 6;\ x_3 = 2;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0$.

Lo anterior evidencia la consistencia de la forma matricial del Método Simplex como alternativa de solución de problemas de programación dados en forma estándar. Para cerrar el análisis vale la pena hacer notar que los procesos de cálculo se basan en operaciones entre vectores y matrices a partir de elementos iniciales, pero en cada iteración, luego de la actualización de la matriz $\boldsymbol{B}$ siempre se requiere hallar la nueva matriz inversa $\boldsymbol{B^{-1}}$, lo que en algunos casos puede representar un tedioso trabajo si no se cuenta con herramientas que agilicen su cálculo. Sin embargo posteriormente en esta misma cartilla estudiaremos un nuevo procedimiento, conocido como Método Simplex revisado, que facilita la actualización de la matriz inversa como parte del proceso de solución de problemas de programación lineal, dados en forma estándar, mediante la forma matricial del Método Simplex.

Principio fundamental del Método Simplex

El trabajo de la sección anterior de solución de problemas de programación lineal dados en forma estándar, con base en la representación matricial, permite resaltar un principio fundamental que será de gran utilidad en la siguiente sección correspondiente al estudio del Método Simplex revisado y en la próxima cartilla, al abordar los fundamentos de la dualidad y el análisis de sensibilidad. Una primera idea de estos principios tiene que ver con el hecho que la fila F_o de la representación tabular inicial corresponde a la fila $[-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0}, 0]$, mientras que las filas restantes corresponden a $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{b}]$. Luego de cada iteración, los nuevos coeficientes de las variables de holgura en la fila F_o se hallan mediante $\boldsymbol{c_B B^{-1}}$ mientras que en las filas restantes se hallan mediante $\boldsymbol{B^{-1}}$, donde $\boldsymbol{B}$ la matriz de coeficientes de las actuales variables básicas en las restricciones y $\boldsymbol{c_B}$ los coeficientes de las variables básicas en la fila F_o. En resumen, a partir de la tabla inicial, en cualquier iteración los coeficientes se obtienen mediante:

$$Fila\ F_o = [-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0}, 0] + \boldsymbol{c_B B^{-1}}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{b}]$$

$$Filas\ F_1 a\ F_m = [-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0}, 0] + \boldsymbol{c_B B^{-1}}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{b}]$$

Dada la importancia de los valores en la tabla o iteración final, lo que da la solución óptima, usaremos la siguiente notación para referirnos en adelante a elementos de la solución óptima.

Sea $\boldsymbol{B}$ la matriz de coeficientes de las variables básicas luego de la última iteración, denotamos entonces:

$\boldsymbol{S^o} = \boldsymbol{B^{-1}} = Matriz\ de\ coeficientes\ de\ las\ variables\ de\ holgura\ en\ F_1\ a\ F_{m.}$
$\boldsymbol{A^o} = \boldsymbol{B^{-1}A} = Matriz\ de\ coeficientes\ de\ las\ variables\ originales\ en\ F_1\ a\ F_m.$
$\boldsymbol{y^o} = \boldsymbol{c_B B^{-1}} = Vector\ de\ coeficientes\ de\ las\ variables\ de\ holgura\ en\ F_0.$
$\boldsymbol{z^o} = \boldsymbol{c_B B^{-1}A} = vector\ agregado\ por\ el\ método\ simplex\ al\ vector - \boldsymbol{c}\ inicial.$
$(se\ da\ que\ \boldsymbol{z^o} - c\ son\ los\ coeficientes\ de\ las\ variables\ originales\ en\ F_0)$
$Z^o = \boldsymbol{c_B B^{-1}b} = Óptimo\ valor\ de\ la\ función\ objetivo.$
$\boldsymbol{b}^o = \boldsymbol{B^{-1}b} = Valores\ del\ lado\ derecho\ del\ caso\ óptimo\ en\ F_1\ a\ F_{m.}.$
Consideremos ahora la situación en la que conocemos la tabla inicial, definida mediante:

$$\boldsymbol{T_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix}; \quad con \begin{cases} \boldsymbol{t} = [-\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{0} \mid 0] \quad Fila\ F_0 \\ \\ \boldsymbol{T} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{b}] \quad Filas\ F_1\ a\ F_m \end{cases}$$

Si también conocemos el vector $\;^{\boldsymbol{o}}$ de coeficientes de las variables de holgura en F_0 en la tabla final y la matriz $\boldsymbol{S^o}$ de coeficientes de las variables de holgura en las filas F_1 a $F_{m.}$ En la tabla final, entonces podemos hallar el resto de la tabla final mediante lo que, al menos en este curso, se denomina principio fundamental del Método Simplex, cuyas fórmulas se presentan a continuación:

$$\boldsymbol{t^o} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{y^o T} == [\boldsymbol{y^o A} - \boldsymbol{c} \ \mid \boldsymbol{y^o} \ \mid \boldsymbol{y^o b}]$$

$$\boldsymbol{T^o} = \boldsymbol{S^o T} = \boldsymbol{S^o}[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{S^o A} \mid \boldsymbol{S^o} \mid \boldsymbol{S^o b}]$$

Para verificar el cumplimiento y uso de este principio fundamental del Método Simplex tomemos nuevamente el problema de la empresa La Arenosa. En este caso la tabla inicial y la respectiva representaciónmatricial son las siguientes:

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	-6	-10	0	0	0	0
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	0	12
F_3	x_5	0	3	2	0	0	1	18

$$\boldsymbol{t} = [-\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{0} \mid 0] = [-6, -10 \mid 0, 0, 0 \mid 0]$$

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

Tabla 2
Fuente: Propia.

En la tabla final, que da la solución óptima al modelo planteado, se resalta el vector $\boldsymbol{y^o}$ y la matriz $\boldsymbol{S^o}$, estos componentes separados y la tabla final se muestran a continuación.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	0	0	**0**	**3**	**2**	72
F_1	x_3	0	0	0	**1**	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	2
F_2	x_2	0	0	1	**0**	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	**0**	6
F_3	x_1	0	1	0	**0**	$-\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	2

$$\boldsymbol{y^o} = [\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{3}, \quad \boldsymbol{2}]$$

$$\boldsymbol{S^o} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Tabla 3
Fuente: Propia.

Si bien es cierto que ya se conoce los demás elementos de la tabal final, realizaremos ahora los cálculos que permitan verificar el cumplimiento de las fórmulas asocoadas con el principio fundamental del Método Simplex, según las cuales a partir de la tabla inicial, el vector $\boldsymbol{y^o}$ y la matriz $\boldsymbol{S^o}$ se puede completar la tabla final. Los cálculos son los siguientes.

$\boldsymbol{Primera\ parte}$: $\boldsymbol{t^o} = [\boldsymbol{y^o A - c} \ \mid \ \boldsymbol{y^o} \ \mid \boldsymbol{y^o b}]$

$$\boldsymbol{y^o A - c} = [0,3,2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} - [6,10] = [6,10] - [6,10] = [0,0]$$

$$\boldsymbol{y^o b} = [0,3,2]\begin{bmatrix}4\\ 12\\ 18\end{bmatrix} = 72$$

Entonces:

$\boldsymbol{t^o} = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0} \ \mid \ 0,3,2 \ \mid 72]$

$\boldsymbol{Segunda\ parte}$: $\boldsymbol{T^o} = [\boldsymbol{S^o A} \ \mid \ \boldsymbol{S^o} \ \mid \boldsymbol{S^o}]$

$$\boldsymbol{S^o A} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S^o b} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 12\\ 18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 6\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T^o} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c}0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6\\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2\end{array}\right]$$

Tal como era de esperarse, los cálculos muestran la coincidencia con los otros elementos de la tabla final.

Método Simplex revisado

Este método se fundamenta en la forma matricial del Método Simplex, por lo que hay que usar las ideas asociadas con variables básicas entrante y saliente, entre otros, pero presenta la ventaja de facilitar la actualización de la inversa de la matriz $\boldsymbol{B}$.

Para formalizar el estudio del Método Simplex revisado consideremos las siguientes ideas:

$x_k = Variable\ básica\ que\ entra$
$a'_{ik} = Coeficiente\ de\ x_k\ en\ la\ i - esima\ restricción\ (i = 1, 2, \dots, m)$
$r = Numero\ de\ la\ ecuación\ que\ contiene\ la\ variable\ básica\ que\ sale.$

En lo que sigue de este tema denotaremos como $\boldsymbol{B_a^{-1}}$ la inversa de la antigua matriz $\boldsymbol{B}$ y como $\boldsymbol{B_n^{-1}}$ la inversa de la nueva matriz $\boldsymbol{B}$. Con base en en esto y las definiciones anteriores y fundamentados en procedimientos relacionados con operaciones entre filas, se puede llegar a expresiones que permitan calcular el elemento en la posición (i, j) de la matriz $\boldsymbol{B_n^{-1}}$ (simbolizado como $(\boldsymbol{B_n^{-1}})_{\boldsymbol{ij}}$) a partir del elemento en la posición (i, j) de la matriz $\boldsymbol{B_n^{-1}}$**,** (simbolizado como $(\boldsymbol{B_a^{-1}})_{\boldsymbol{ij}}$). La expresión de cálculo es la siguiente:

$$(\boldsymbol{B_n^{-1}})_{\boldsymbol{ij}} = \begin{cases} (\boldsymbol{B_a^{-1}})_{\boldsymbol{ij}} - \frac{a'_{ik}}{a'_{rk}} (\boldsymbol{B_a^{-1}})_{\boldsymbol{rj}} & si\ la\ fila\ i\ no\ es\ la\ misma\ fila\ r. \\ \\ \frac{1}{a'_{rk}} (\boldsymbol{B_a^{-1}})_{\boldsymbol{rj}} & si\ la\ fila\ i\ es\ la\ misma\ fila\ r \end{cases}$$

En forma matricial lo anterior se puede escribir como:

$$\boldsymbol{B_n^{-1}} = \boldsymbol{E B_a^{-1}}$$

Siendo $\boldsymbol{E}$ una matriz obtenida a partir de la matriz identidad $\boldsymbol{I}$ remplazando la $r - esima$ columna de $\boldsymbol{I}$ por el vector $\boldsymbol{\rho}$ definido mediante:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix}, con\ \rho_1 = \begin{cases} -\dfrac{a'_{ik}}{a'_{rk}} & si\ la\ fila\ i\ no\ es\ la\ misma\ fila\ r \\ \\ \dfrac{1}{a'_{rk}} & si\ la\ fila\ i\ es\ la\ misma\ fila\ r \end{cases}$$

Se muestra ahora el uso del Método Simplex revisado mediante la solución del problema de la empresa la Arenosa.

Ejemplo 4.3:
Aplicar el Método Simplex revisado para resolver el problema del ejemplo 4.1 y 4.2.

Solución: luego de incorporar las variables de holgura, representar el respectivo modelo en forma matricial y seleccionar las variables de holgura como variables básicas iniciales tenemos:

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0,0,0];\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Se calcula ahora el resultado de $\boldsymbol{c_b B^{-1} A - c}$ para hallar los coeficientes de las variables no básicas x_1, x_2.

$$\boldsymbol{c_b B^{-1} A - c} = [0,0,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [6,10] = [-6,-10]$$

Prueba de optimalidad: La existencia en el resultado de valores negativos indica que la actual solución no es óptima.

Iteración 1: como tiene el coeficiente más negativo en la fila de la función objetivo, x_2 es la variable básica entrante, con lo cual, a la luz del Método Simplex revisado, $k = 2$.

De la matriz $\boldsymbol{B^{-1} A}$ los coeficientes de x_2 en las ecuaciones 1, 2 y 3 son los valores de la segunda columna, como se tiene que

$$\boldsymbol{B^{-1} A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces los coeficientes buscados son:

$$a_{12} = 0;\ a_{22} = 2;\ a_{32} = 2$$

Dividiendo los valores del lado derecho de las ecuaciones (4, 12 y 18) por los respectivos coeficientes positivos de x_2, y según el criterio de mínimo cociente, se encuentra que la variable básica saliente es x_4. Al ser x_4 el segundo componente del vector $\mathbf{x}_B$, se tiene que $r = 2$.

Se requiere ahora actualizar la inversa de la matriz $\boldsymbol{B}$**,** para lo cual calculamos primero el vector $\boldsymbol{\rho}$ y luego la matriz $\boldsymbol{E}$ (cambiando la segunda columna de la matriz identidad por el vector $\boldsymbol{\rho}$).

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{12}}{a'_{22}} \\ \dfrac{1}{a'_{22}} \\ -\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, la nueva matriz $\boldsymbol{B^{-1}}$ es:

$$\boldsymbol{B_n^{-1}} = \boldsymbol{EB_a^{-1}} = \boldsymbol{EI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La actualización de $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ y $\boldsymbol{c_B}$ resulta en:

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [0,10,0]$$

Prueba de optimalidad: las variables no básicas son ahora por x_1(variable original) y x_4 (variable de holgura). Hallamos el coeficiente de x_1 en la función objetivo mediante el cálculo de $\boldsymbol{c_B B^{-1} A} - \boldsymbol{c}$ y tenemos:

$$\boldsymbol{c_b B^{-1} A} - \boldsymbol{c} = [0,10,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [6,10] = [-6,-5]$$

Se verifica entonces que el coeficiente buscado es -6, mientras que del producto $\boldsymbol{c_B B^{-1} A}$ hallamos el respectivo coeficiente de x_4, el producto es:

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [0,10,0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [0,5,0]$$

Con lo cual el coeficiente de x_4 es 5. Como el coeficiente de x_1 es negativo la actual solución que de aquí surja no es óptima.

Iteración 2: de la iteración anterior se sabe que el coeficiente más negativo en la fila de la función objetivo es el de x_1, por tanto esta es la variable básica entrante y $k = 1$.

Los valores de la primera columna de $\boldsymbol{B^{-1}A}$ son los coeficientes de x_1 en las ecuaciones 1, 2 y 3, como se tiene que

$$\boldsymbol{B^{-1}A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces los coeficientes buscados son:

$$a_{11} = 1;\ a_{21} = 0;\ a_{31} = 3$$

Los valores de $\mathbf{x}_B$ en la anterior iteración son $4, 6\ y\ 6$, (nuevos valores del lado derecho de las ecuaciones), al dividir respectivamente estos valores por los coeficientes positivos de x_1 el criterio de cociente mínimo indica que la variable saliente es x_5 y por tanto $r = 3$

Ahora el vector $\boldsymbol{\rho}$ y la matriz $\boldsymbol{E}$ son:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} -\frac{a'_{11}}{a'_{31}} \\ -\frac{a'_{21}}{a'_{31}} \\ \frac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces, la nueva matriz $\boldsymbol{B^{-1}}$ es:

$$\boldsymbol{B_n^{-1}} = \boldsymbol{EB_a^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Los nuevos $\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}}$ y $\boldsymbol{c_B}$ son:

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B^{-1}b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix};\ \boldsymbol{c_B} = [6,10,0]$$

Prueba de optimalidad de la segunda iteración: las variables no básicas en esta iteración son x_4 y x_5, (ambas variables de holgura) sus coeficientes en la función objetivo resultan de $\boldsymbol{c_B B^{-1} A}$.

$$\boldsymbol{c_B B^{-1}} = [0,10,6]\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0,3,2]$$

Como tales coeficientes son positivos la solución correspondiente a esta iteración es óptima.

Se destaca en este procedimiento la facilidad que ofrece el Método Simplex revisado en el sentido de evitar el cálculo explícito de la inversa de la matriz B, en razón a que ofrece un procedimiento directo de actualización.

3

Unidad 3

Fundamentos de dualidad y análisis de sensibilidad

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Las primeras cuatro cartillas de este curso de Investigación de operaciones I las hemos dedicado fundamentalmente a aspectos relacionados con la búsqueda de una solución a un problema a partir de un modelo inicial formulado a partir de un contexto propio de programación lineal, sin embargo, en investigación de operaciones en general y en programación lineal en particular, no siempre se llega al trabajo final mediante la solución de un modelo inicial. Se debe considerar la posibilidad de revisar el modelo planteado y que a partir de ello se pueda encontrar una mejor solución. Aunque es válido pensar que ello demande la necesidad de resolver otro problema desde cero, en programación lineal existe un conjunto de principios que podrían aplicarse a partir de la solución de un modelo inicial, tales principios hacen parte de lo que se conoce como análisis de sensibilidad, en lo cual resulta de vital importancia un tema previo de gran importancia, este corresponde a la teoría de la dualidad.

En esta cartilla 5, en la que el curso ya ha pasado su meridiano, abordamos los temas relacionados con teoría de la dualidad y análisis de sensibilidad, los que para nuestro ámbito hacen parte de los primeros temas avanzados en el área de programación lineal.

El desarrollo de la cartilla inicia con una introducción al análisis post óptimo, destacando en ello los precios sombra, que muy cercanamente están relacionado con la teoría de la dualidad. Seguidamente abordamos en sí los principios de la teoría de la dualidad para finalizar el desarrollo con un breve tratamiento del análisis de sensibilidad.

Recomendaciones metodológicas

Como recomendación básica, al igual que las semanas anteriores, se plantea la juiciosa y cuidadosa lectura de los temas tratados en esta cartilla, de manera simultánea o bien al final de la misma es importante la revisión de los recursos adicionales ofrecidos en el módulo.

En la sección lecturas complementarias el estudiante encontrará ejercicios resueltos que refuerzan las exposiciones hechas en la cartilla, aprovechar este recurso es una buena estrategia de cercamiento al alcance de los objetivos propuestos, también se recomienda la visualización de los ejercicios y contenidos ilustrados en los videos cuyos enlaces son ofrecidos a través de la sección de video capsulas, estos videos proporcionan explicaciones vivas del tema y solución de problemas.

Tratándose de contenidos en los que se debe realizar cálculos matriciales en los que se aplica los principios tratados en el módulo, entre los recursos del módulo se presenta un resumen de principios que se aplican en el desarrollo de ejercicios y solución de problemas relacionados con teoría de la dualidad y el análisis de sensibilidad.

Como todo proceso de aprendizaje demanda enfrentamiento del estudiante a desafíos a través de los cuales pueda verificar, para sí mismo la apropiación de los contenidos, se presenta la sección de ejercicios de repaso, en la cual se encuentra ejercicios propuestos sobre la temática de esta cartilla. Se recomienda al estudiante tener presente el material del video resumen de esta semana.

Adelante con el aprovechamiento de los recursos.

Desarrollo temático

Fundamentos de dualidad y análisis de sensibilidad

Introducción al análisis post óptimo

La solución de un problema de Investigación de operaciones no siempre va hasta la aplicación de un procedimiento o algoritmo que entregue la solución óptima del problema a partir del modelo planteado, siempre se debe hacer un análisis posterior conocido como análisis post óptimo, esto es particularmente aplicable a los problemas de programación lineal. Por ejemplo, en problemas que involucran muchísimas restricciones estructurales y variables de decisión, es importante realizar variaciones al modelo tomando en cuenta posibles situaciones no consideradas antes, lo que lleva a que luego de hallar una solución óptima, se procede a resolver diferentes versiones del problema con las variaciones que se considere. Podría resultar muy tedioso las múltiples aplicaciones del algoritmo de solución, sin embargo, utilizando una técnica conocida como reoptimización, se puede inferir los cambios a realizarse a partir de la tabla que da la solución a reoptimizar, con la ventaja que una mejor solución, correspondiente al modelo modificado, generalmente se encuentra con mucho menos trabajo.

Concepto de precios sombra

En restricciones estructurales de la forma $\leq b_i$ los valores de los b_i representan límites de recursos, que generalmente están asociados con decisiones del administrador, pero en el análisis post optimo podrían aumentarse a cambio de que se justifique mediante un significativo beneficio adicional en la función objetivo. Frente a lo anterior resulta importante conocer en qué medida mejora la función objetivo con el aumento de los valores de b_i. En el contexto de aplicación del Método Simplex se habla de precio sombra. El precio sombra del $i-esimo$ recurso, simbolizado mediante y_i^o mide la razón a la que mejora la función objetivo Z como consecuencia de un aumento en b_i. En la aplicación del Método Simplex, aunque no se ha hablado de ello, el precio sobra de $la\ i-esima$ restricción corresponde al coeficiente con que aparece la $i-esima$ variable de holgura en la fila F_0 de la tabla simplex final.

Según lo indicado en el párrafo anterior los precios sombra en el problema de la empresa La Arenosa son $y_1^o=0;\ y_2^o=\frac{3}{2};\ y_3^o=1$, lo que significa que, por ejemplo, un incremento de una unidad en el valor b_2 (de 12 a 13) da lugar a un aumento de $\frac{3}{2}$ en la función objetivo. Con esta información el administrador cuenta con mayores elementos pare decidir si se altera el modelo.

En relación con lo antes esbozado, encontramos en el área de la programación lineal el concepto de dualidad, según el cual con cada problema de programación lineal, al que se le llama problema primal, se asocia otro problema conocido como problema dual. A partir de los fundamentos de la dualidad en la programación lineal se estudia las diferentes relaciones entre los dos problemas. Un hecho de particular importancia es que al hallar la solución óptima del problema dual se tiene valiosa información para hallar los precios sombra, también encontramos la importancia que reviste se relaciona con el análisis de sensibilidad post óptimo.

Principios de dualidad en programación lineal

Para ilustrar el concepto de dualidad en programación lineal, se presenta a continuación la forma algebraica del modelo genérico del problema original, o problema primal, en forma estándar y el respectivo problema dual.

$Maximizar: Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ $sujeta\ a:$ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2$ $\vdots \vdots \vdots \vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0$	$Minimizar: W = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m$ $sujeta\ a:$ $a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$ $a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_n \leq c_2$ $\vdots \vdots \vdots \vdots$ $a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \leq c_n$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots,\ x_n \geq 0$
Forma algebraica del problema primal	**Forma algebraica del problema dual**

Tabla 1

Fuente: Propia.

Formulación de problema dual en forma algebraica

De la representación algebraica del problema dual a partir de la del primal, presentada en la sección anterior, se puede decir que el modelo del problema dual se puede hallar del primal mediante las siguientes transformaciones:

- El problema dual es un problema de minimización si el primal es de maximización.

- Variables de decisión del problema dual: es un nuevo conjunto de m variables $y_1, y_2, \ldots, y_m$, donde m es el número de restricciones estructurales del problema primal.

- **Coeficientes de función objetivo:** los coeficientes de las variables de decisión en la función objetivo del problema dual son los m valores b_i del lado derecho de las restricciones del problema primal.

- **Valores del lado derecho:** los valores del lado derecho de las restricciones estructurales del problema dual son los n coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de las variables de decisión en la función objetivo del problema primal.

- **Coeficientes en las restricciones:** los coeficientes de las variables de decisión en la $k-esima$ restricción estructural del problema dual son los coeficientes de la $k-esima$ variable en el problema primal (los coeficientes de la primera variable en las restricciones del primal son los coeficientes de la primera restricción en el problema dual y así sucesivamente).

- **Sentido de la desigualdad de cada restricción:** el sentido de la desigualdad cambia del problema primal al dual

Un ejemplo básico de formulación del problema dual

Ejemplo 5.1: a continuación se presenta la formulación algebraica del problema primal y del dual correspondiente al modelo de la empresa La Arenosa.

Forma algebraica del problema de la empresa La Arenosa	
$Maximizar\ z = 6x_1 + 10x_2$ $Sujeta\ a:$ $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ $x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$	$Minimizar\ W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ $Sujeta\ a:$ $y_1 + 3y_3 \geq 6$ $2y_2 + 2y_3 \geq 10$ $y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0$
Problema primal	**Problema dual**

Tabla 2

Fuente: Propia.

Formulación de problema dual en forma matricial

A partir de lo anterior, y teniendo en cuenta cómo se obtiene la representación matricial a partir de la representación algebraica, para el problema dual se tiene el vector fila $\boldsymbol{b}$ compuesto por $b_1, b_2, \dots, b_m$, el vector columna $\boldsymbol{y}$ compuesto $y_1, y_2, \dots, y_m$, además se puede ver que $\boldsymbol{A^T}$ es la matriz de coeficientes de las restricciones estructurales, $\boldsymbol{c}$ el vector columna compuesto por $c_1, c_2, \dots, c_n$, entonces la relación entre las representaciones matriciales de los problemas primal y dual es:

Atendiendo a las propiedades de producto de matrices, $\boldsymbol{A^T y}$ se puede expresar como $\boldsymbol{y^T A}$ (o $\boldsymbol{yA}$ si se considera desde el inicio al vector $\boldsymbol{y}$ como un vector fila).

Ejemplo 5.2: representación matricial de los problemas primal y dual del modelo de la empresa La Arenosa.

Forma matricial del problema de la empresa La Arenosa	
$Maximizar: Z = [6, 10]\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$ $Sujeta\ a:$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$	$Minimizar: \boldsymbol{W} = [4, 12, 18]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $Sujeta\ a:$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \\ \mathbf{10} \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{y} \geq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$
Problema primal	**Problema dual**

Tabla 3

Fuente: Propia.

Dado que $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \dots z_n) = \boldsymbol{c_B B^{-1} A}$ es el vector agregado por el Método Simplex en cada iteración al vector $-\boldsymbol{c} = (-c_1, -c_2, \dots -c_n)$ de coeficientes iniciales, entonces, en cada iteración sobre el problema primal, los coeficientes de las variables originales $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}$ en la fila F_0 son respectivamente los componentes de $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{c} = (z_1 - c_1, z_2 - c_2, \dots z_n - c_n)$, mientras que, los coeficientes de las variables de holgura $(x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ en la misma fila son los componentes de $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Entonces, según la formulación del problema dual a partir del primal, se puede afirmar que el problema dual es una forma alternativa de plantear la meta a lograr, a través del Método Simplex, la solución óptima del primal que satisfaga la condición de optimalidad, establecida en términos de los coeficientes de las variables en la fila F_0 como $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_n \geq 0$, y $y_1 \geq, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$.

Cuando se alcanza la condición de optimalidad es claro que el vector $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ es una óptima solución del problema dual, en cuyo caso se simboliza mediante $\boldsymbol{y^o}$ ($\boldsymbol{y}$ óptimo) de componentes $y_1^o, y_2^o, \dots, y_m^o$ y el valor óptimo de la función objetivo W del problema dual coincide con el óptimo Z del primal. Los valores óptimos $y_1^o, y_2^o, \dots, y_m^o$ del problema dual corresponden a los precios sombra del problema primal.

Propiedades de la dualidad y relación dual-primal

A continuación se muestra las propiedades de la dualidad que permiten resumir las relaciones entre los problemas primal y dual, se presenta estas propiedades en términos asociados con la representación matricial del modelo del problema.

- **Propiedad de dualidad débil:** sea el vector $\boldsymbol{x}$ una solución factible del problema primal y sea $\boldsymbol{y}$ una solución factible del problema dual, entonces:

$$\boldsymbol{cx^o} = \boldsymbol{by^o}$$

- **Propiedad de dualidad fuerte:** sea el vector $\boldsymbol{x^o}$ una solución óptima del problema primal y sea $\boldsymbol{y^o}$ una solución óptima del problema dual, entonces:

$$\boldsymbol{cx} \leq \boldsymbol{by}$$

- **Propiedad de soluciones complementarias:** mediante el Método Simplex, en cada una de las iteraciones, se puede hallar una solución factible $\boldsymbol{x}$ del problema primal y una solución complementaria $\boldsymbol{y}$ del dual (que corresponde a los coeficientes de las variables de holgura en la fila F_0) tales que:

$$\boldsymbol{cx} = \boldsymbol{by}$$

La propiedad de holgura complementaria establece que si $\boldsymbol{x}$ no es una solución óptima del problema primal, entonces $\boldsymbol{y}$ no es una solución factible del problema dual.

- **Propiedad de soluciones complementarias óptimas:** al final, mediante el Método Simplex se puede hallar una solución óptima $\boldsymbol{x^o}$ del problema primal y una solución complementaria $\boldsymbol{y^o}$ del dual (correspondiente a los coeficientes de las variables de holgura en la fila F_0) tales que:

$$\boldsymbol{cx^o} = \boldsymbol{by^o}$$

La propiedad de soluciones complementarias óptimas establece que los componentes $\boldsymbol{y_i^o}$ de la solución $\boldsymbol{y^o}$ del problema dual, son los respectivos valores de precios sombra del problema primal.

- **Propiedad de simetría:** dado un problema considerado como primal, el problema dual del dual es el problema primal, esto significa que cualquiera de los dos problemas puede ser considerado el dual o el primal.

Soluciones básicas complementarias

Hemos tratado como a partir de la formulación del problema original o primal llegamos a la formulación del dual, una relación fundamental entre los dos problemas es la lógica correspondencia entre sus soluciones básicas. Los desarrollos alrededor de estos principios y los relacionados con el Método Simplex permitirían llegar a otros resultados que completan los presentados en la sección propiedades de la dualidad, estos se resumen a continuación.

Propiedad de soluciones básicas complementarias: esta propiedad establece que para cada solución básica del problema primal existe una solución básica complementaria de la contraparte dual. A partir de la fila $\boldsymbol{F_o}$ de la tabla correspondiente a una solución básica del problema primal, se puede hallar la solución básica complementaria $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{c})$ del problema dual.

Propiedad de holgura complementaria: esta propiedad establece que las variables de la solución básica del problema primal y de su contraparte dual se relacionan de tal manera que si una variable en el problema primal es básica, la asociada variable en el problema dual es no básica y viceversa.

Soluciones básicas óptimas complementarias: toda solución básica óptima del problema dual tiene una solución básica óptima complementaria en el problema dual. A partir de la fila F_o de la tabla correspondiente a una solución óptima del problema primal, se puede hallar la solución óptima complementaria $(\boldsymbol{y^o}, \boldsymbol{z^o}-\boldsymbol{c})$ del problema dual.

Tomando en consideración los dos problemas, el primal y el dual, las soluciones básicas se clasifican de acuerdo con el cumplimiento o no de las condiciones de factibilidad y de optimalidad. La **condición de factibilidad** es aquella en la cual las variables originales y de holgura satisfacen la no negatividad, y la **condición de optimalidad** obliga a que todos los coeficientes en la fila F_o son no negativos. En este contexto se emplea otros términos como subóptima y suróptima para referirse

En resumen las soluciones básicas:

- **Solución óptima:** satisface las condiciones de factibilidad y de optimalidad.
- **Solución subóptima:** satisface las condiciones de factibilidad, pero no las de optimalidad.
- **Solución superóptima:** no satisface las condiciones de factibilidad pero si satisface las de optimalidad.
- **Soluciones factibles primalas:** son soluciones básicas complementarias en las que la solución básica primal es factible.
- **Soluciones factibles duales:** son soluciones básicas complementarias en las que la solución básica dual complementaria es solución factible del problema primal.

Considerando lo anterior se tiene la siguiente tabla que resume la relación entre las diferentes soluciones básicas complementarias.

Solución básica del primal	Solución básica complementaria del dual	Factible primal	Factible dual
Subóptima	Superóptima	Sí	No
Óptima	Óptima	Sí	Sí
Superóptima	Subóptima	No	Sí
Ni factible ni superóptima	Ni factible ni superóptima	No	No

Tabla 4. Relaciones entre soluciones básicas complementarias

Fuente: Propia.

Según las definiciones y relaciones entre soluciones básicas, y atendiendo a los procedimientos de desarrollo y criterio de terminación del Método Simplex, se ve que el Método Simplex va encontrando soluciones subóptimas hasta encontrar una solución óptima del problema primal y al mismo tiempo va encontrando las soluciones superóptimas complementarias del dual hasta alcanzar la satisfacción de las condiciones de factibilidad.

Utilidad o aplicaciones de la dualidad

Tal como se habrá podido notar en discusiones anteriores, la existencia de un mayor número de restricciones estructurales demanda mayor esfuerzo o cálculos matemáticos que un mayor número de variables, es decir, que resulta preferible resolver problemas con pocas restricciones y muchas variables de decisión, que aquellos que tengan pocas variables y muchas restricciones, en este sentido es importante considerar que, a partir de la formulación de un problema primal, podría resultar más fácil, por ejemplo mediante el uso del Método Simplex, hallar primero la solución del problema dual y luego aplicar las propiedades de la dualidad, resumidas en la sección anterior, para lograr la solución del problema primal, pero quizá la aplicación más importante dada a los principios de dualidad de problemas de programación lineal se refieren al análisis de sensibilidad que estudiaremos en la sección siguiente.

Análisis de sensibilidad

La expresión análisis de sensibilidad en el contexto de la programación lineal se refiere al estudio de las consecuencias, sobre una solución óptima obtenida, si se consideran cambios en los valores de los parámetros que definen el modelo, por ejemplo algunos coeficientes en la función objetivo, o en los coeficientes y valores del lado derecho de las restricciones estructurales. Según lo estudiado, en relación con los principios de la dualidad, es claro que los cambios en los parámetros del modelo del problema primal generan cambios en los respectivos parámetros del problema dual. Un cambio que podría considerarse sobre un modelo inicialmente planteado es sobre los coeficientes de una variable no básica en la solución obtenida a partir del modelo inicial, frente a lo cual se tiene que, por ser no básica, su valor es cero y por tanto no afecta la factibilidad de la función, pero puede haber efectos sobre la solución complementaria, que se encuentra asociada con el problema dual.

En la solución de una situación, que se pueda modelar como un problema de programación lineal, habitualmente encontraremos parámetros cuya modificación no afectan notablemente la factibilidad u optimalidad de una solución, pero también están aquellos que sí lo hacen, por lo que, en el marco del análisis de sensibilidad, es necesario tener claridad sobre cuáles son los que generan mayor impacto sobre la optimalidad de una solución, a estos se les suele llamar parámetros sensibles. También resulta necesario identificar el rango de valores de los parámetros no sensibles, a este rango se le suele llamar intervalo de permisible de valores.

Es razonable pensar que luego de estudiar posibles cambios en los parámetros, que conduzcan a una mejor solución, se debe resolver desde el comienzo el problema para el modelo modificado, lo que no representaría mayores dificultades en el caso de problemas con un pequeño número de variables y restricciones, pero en problemas bastante grande esto demandaría una gran cantidad de trabajo que sería preferible evitar. Afortunadamente el principio fundamental del Método Simplex, estudiado en la cartilla de la semana 4, disminuye notablemente la necesidad de cálculos al mostrar de forma casi inmediata en qué medida, los cambios al modelo impactan la solución final antes obtenida. Según lo que indique este análisis se puede establecer si la solución óptima hallada para el modelo original es o no la más conveniente y proceder en consecuencia.

Con el fin de presentar el proceso mediante el cual Para describir este procedimiento asumamos que mediante el uso del Método Simplex se ha hallado a una solución óptima de un modelo inicial de parámetros c_j, a_{ij}, b_i, o las respectivas formas matriciales $\boldsymbol{cx}$ y $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Si se cambia alguno de los parámetros las nuevas expresiones matriciales serán $\tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}$ y $\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} = \widetilde{\boldsymbol{b}}$ o parámetros $\tilde{c}_j, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$.

Para actualización de la tabla simplex que da la solución óptima del modelo inicial, de tal manera que se halle la tabla final que se obtendría si se procediera sobre el modelo modificado, retomamos el principio fundamental del Método Simplex, estudiado en la sección 4.x, según el cual:

$$\boldsymbol{T_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t} \\ \\ \boldsymbol{T} \end{bmatrix};\ con \begin{cases} \boldsymbol{t} = [-\boldsymbol{c} \mid \boldsymbol{0} \mid 0]\ Fila\ F_0 \\ \\ \boldsymbol{T} = [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{b}]\ Filas\ F_1\ a\ F_m \end{cases}$$

$$\boldsymbol{t^o} = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{y^o T} \text{ y } \boldsymbol{T^o} = \boldsymbol{S^o T}$$

Es decir, la tabla simplex final del modelo modificado se puede hallar a partir de la tabla inicial del nuevo modelo y los valores de $\boldsymbol{y^o}$ (coeficientes de las variables de holgura en F_0) y $\boldsymbol{S^o}$ (coeficientes de las variables de holgura en las filas F_1 a $F_{m.}$). Además, $\boldsymbol{y^o}$ es el vector de variables del problema dual (tal como se vio en la sección 5.x). Según lo anterior, teniendo en cuenta los cambios antes señalados se tiene:

	Z	**Variables originales**	**Variables de holgura**	**Lado derecho**
$Fila\ F_0$	$\mathbf{1}$	$-\tilde{\boldsymbol{c}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$Filas\ F_1\ a\ F_m$	$\mathbf{0}$	$\widetilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{I}$	$\widetilde{\boldsymbol{b}}$
Tabla inicial del modelo modificado				
Procedimientos de modificación				
	Z	Variables originales	Variables de holgura	Lado derecho
$Fila\ F_0$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{z^o} - \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{y^o}\widetilde{\boldsymbol{A}} - \tilde{\boldsymbol{c}}$	$\boldsymbol{y^o}$	$Z = \boldsymbol{y^o}\widetilde{\boldsymbol{b}}$
$Filas\ F_1\ a\ F_m$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{A^o} = \boldsymbol{S^o}\widetilde{\boldsymbol{A}}$	$\boldsymbol{S^o}$	$\boldsymbol{b^o} = \boldsymbol{S^o}\widetilde{\boldsymbol{b}}$
Tabla final del modelo modificado				

Tabla 5. Obtención de la tabla final del modelo modificado a partir de su tabla inicial

Fuente: Propia.

Se recalca aquí que lo fundamental de este planteamiento radica en el hecho que, con base en la solución óptima obtenida a partir de un modelo inicial y de la tabla inicial del modelo modificado, se puede hallar la tabla final del modificado sin necesidad de realizar todas las operaciones asociados con la aplicación del Método Simplex aplicado sobre el modelo inicial.

Realizada la transformación que conduce a la tabla final del modelo modificado, posiblemente se requiera llevar la tabla a la forma apropiada de eliminación de gaussiana, en la que cada variable básica en la $i - esima$ fila debe tener coeficiente 1 en esa fila, y 0 en las demás, lo cual facilita la identificación de la solución básica asociada con esa tabla y se logra mediante operaciones sobre filas.

Ejemplo 5.3: modificación del modelo inicial del problema de la empresa La Arenosa.

A continuación se muestra la representación matricial iniciales del modelo original y la respectiva representación de un modelo obtenido mediante algunas modificaciones.

Forma matricial del problema de la empresa La Arenosa	
$Maximizar: Z = [6, 10]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $Sujeta\ a:$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$	$Maximizar: Z = [8, 10]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $Sujeta\ a:$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$
Modelo original	**Modelo modificado**

Tabla 6

Fuente: Propia.

Los parámetros correspondientes al nuevo modelo son:

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = [8, 10];\ \tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

De la tabla simplex final del modelo origina, se tiene el vector $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}$ y la matriz $\boldsymbol{S}^{\mathbf{0}}$.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	0	0	**0**	**3**	**2**	72
F_1	x_3	0	0	0	**1**	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$-\mathbf{\frac{1}{3}}$	2
F_2	x_2	0	0	1	**0**	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	**0**	6
F_3	x_1	0	1	0	**0**	$-\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	2

$$\boldsymbol{y^o} = [\mathbf{0}, \quad \mathbf{3}, \quad \mathbf{2}]$$

$$\boldsymbol{S^o} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Tabla 7

Fuente: Propia.

Con base en el nuevo modelo, la respectiva tabla inicial es la tabla 8.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$\boldsymbol{F_0}$	$\boldsymbol{Z}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-8}$	$\mathbf{-10}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
F_1	x_3	0	1	0	1	0	0	4
F_2	x_4	0	0	2	0	1	1	24
F_3	x_5	0	2	2	0	0	0	18

Tabla 8

Fuente: Propia.

A diferencia del desarrollo dada en la sección 4.x, donde reaalmente conociamos el resto de la tabla final, aquí se pone de manifiesto la real utilidad del los principios de cálculo debido a que no conocemos la totalidad de elementos de la tabla final del modelo modificado. Los cálculos son los siguientes.

$\boldsymbol{Primera\, parte}$: $\boldsymbol{t^o} = \left[\boldsymbol{y^o\widetilde{A}} - \boldsymbol{\tilde{c}} \,\middle|\, \boldsymbol{y^o} \mid \boldsymbol{y^o\widetilde{b}}\right]$

$$\boldsymbol{y^o\widetilde{A}} - \boldsymbol{\tilde{c}} = [0,3,2]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} - [8,10] = [4,10] - [8,10] = [-4,0]$$

$$\boldsymbol{y^o b} = [0,3,2]\begin{bmatrix}4\\ 24\\ 18\end{bmatrix} = 108$$

Entonces:

$\boldsymbol{t^o} = [-4,0 \mid 0,3,2 \mid 108]$

$\boldsymbol{Segunda\ parte}$: $\boldsymbol{T^o} = \left[\boldsymbol{S^o\tilde{A}} \mid \boldsymbol{S^o} \mid \boldsymbol{S^o\tilde{b}}\right]$

$$\boldsymbol{S^o\tilde{A}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S^o\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T^o} = \left[\begin{array}{cc|ccc|c} \frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 12 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \end{array}\right]$$

Llevando estos resultados a la representación obtenemos la tabla final del modelo modificado, mostrada en la tabla 9.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$\boldsymbol{F_0}$	$\boldsymbol{Z}$	**1**	$\boldsymbol{-4}$	**0**	**0**	**3**	**2**	**108**
F_1	x_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
F_3	x_1	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2

Tabla 9

Fuente: Propia.

La tabla anterior no está en la forma apropiada de eliminación gaussiana, en razón a la composición de la columna de coeficientes de la variable básica x_1, para transformarla, de tal manera que tenga la forma requerida, multiplicamos la fila F_3 por $\frac{3}{2}$, sumamos a la fila F_0 4 veces la nueva fila F_3 y restamos a la fila F_1 un tercio de la nueva fila F_3 es la tabla.

Fila	V. Básicas	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
F_0	Z	1	0	0	0	1	4	96
F_1	x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
F_2	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
F_3	x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

Tabla 10

Fuente: Propia.

Ahora se tiene la solución básica $x_1 = -3;\ x_2 = 12;\ x_3 = 7;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0$, que no es factible por no satisfacer las condiciones de no negatividad ($x_1 = -3$). Pero según los criterios de la tabla 6.x sí es superóptima, lo que implica que es factible dual. Frente a una situación de este tipo resulta de gran utilidad un nuevo procedimiento conocido como Método Simplex dual, el cual se tratará brevemente en la siguiente sección.

Introducción al Método Simplex dual

Una variante interesante del Método Simplex es el simplex dual, el cual trata con soluciones básicas del problema dual que son factibles duales pero no son factibles primales y luego procede a la búsqueda de una solución óptima de tal manera que se alcance la factibilidad en el problema primal. El procedimiento es tal que opera como con un problema como si se usara al mismo tiempo el Método Simplex al problema dual.

La utilidad del Método Simplex dual se pone de manifiesto en situaciones en las que, por ejemplo, el uso de Método Simplex implique la incorporación de un gran número de variables artificiales que proporcionen una solución factible básica inicial, por lo que resulta preferible iniciar con una solución con una solución que sea básica factible dual en el marco de aplicación del Método Símplex dual. Otra utilidad se relaciona con el análisis de sensibilidad, en el que a partir de una solución óptima hallada mediante el uso del Método Simplex, se introduce variantes al modelo y se busca una nueva solución con base en el modelo modificado. Si la solución básica óptima con que se contaba resulta no ser factible primal pero aún cumple la prueba de optimalidad, es pertinente usar el Método Símplex dual a partir de la solución básica factible dual. Presentamos a continuación un resumen de los detalles o pasos asociados con el Método Símplex dual.

Resumen del Método Símplex dual

Fase 1: iniciación y prueba de factibilidad inicial.

- Transformar las restricciones estructurales de la forma $\geq$ a la forma $\leq$ al multiplicar la inecuación por -1.

- Incorporar las variables de holgura que se requiera para convertir las inecuaciones en ecuaciones.

- Hallar una solución básica en la que los coeficientes de la fila F_0 sean ceros para las variables básicas y no negativos para las no básicas, de esta forma la solución será óptima si es factible.

- Prueba de factibilidad de la situación inicial: En caso que todas las variables básicas sean no negativas, se concluye que la solución es factible y en consecuencia también es óptima, con lo cual se llega al final del proceso, en caso contrario se requiere ingresar al proceso iterativo.

Fase 2: procedimiento iterativo.

- Paso 1 de la iteración: identificar cual debe ser la variable básica saliente, esta será la que tenga el valor más negativo entre el actual conjunto de variables básicas.

- Paso 2 de la iteración: identificar cual variable básica debe ser la entrante, esto se determina examinando las variables no básicas con coeficientes negativos en la fila de la variable básica saliente, la variable entrante será la que arroje cociente de menor valor absoluto al dividir su coeficiente en F_0 por su coeficiente negativo en la final de la básica saliente.

- Paso 3 de iteración: determinación de la nueva solución básica a partir de las ecuaciones actuales, despejando las variables básicas en función de las no básicas y haciendo uso de eliminación de Gauss. Con las variables no básicas igualadas a cero, el valor de las básicas (y *Z*) corresponde al nuevo valor del lado derecho de la ecuación en la que su coeficiente es 1. Luego de estos pasos se lleva a cabo la prueba de factibilidad, si se satisface se da por terminado el problema con la solución hallada, de lo contrario se realiza una nueva iteración.

Ejemplo 5.4

Usamos en este ejemplo el Método Simplex dual para resolver el dual correspondiente al problema de la empresa la Arenosa. A continuación se escribe el problema dual ajustado de tal manera que ahora es un problema de maximización (multiplicando por -1 la ecuación de la función objetivo)

$Maximizar\ z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3$

$Sujeta\ a$:

$y_1\ + 3y_3 \geq\ 6$

$2y_2 + 2y_3 \geq 10$

$y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0$

Solución:

Fase 1: inicialización y prueba de factibilidad inicial:

Transformación de restricciones a la forma $\leq$ e inclusión de variables de holgura: A partir de la anterior formulación se procede a multiplicar por -1 las inecuaciones de las restricciones estructurales, y luego se incluyen las variables de holgura y_4 y y_5, con lo cual el modelo es el siguiente:

$$Maximizar\ z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3$$

$Sujeta\ a$:

$$-y_1 \ - 3y_3 + y_4 + = -6$$

$$-2y_2 \ - 2y_3 \ + \ y_5 = -10$$

$$y_1 \geq 0;\ y_2 \geq 0;\ y_3 \geq 0$$

Podemos expresar la ecuación de la función $Z+4y_1 + 12y_2 + 18y_3 = 0$, con lo cual podemos iniciar el trabajo a partir de la forma tabular en la que las variables básicas iniciales son las variables de holgura, la tabla inicial es la siguiente:

Fila	V. Básicas	Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
$\boldsymbol{F_0}$	$\boldsymbol{Z}$	**1**	**4**	**12**	**18**	**0**	**0**	**0**
F_1	y_4	0	-1	0	-3	1	0	-6
F_2	y_5	0	0	-2	-2	0	1	-10

Tabla 11

Fuente: Propia.

En la tabla 11 los coeficientes de la fila F_0 son ceros para las variables básicas y no negativos para las no básicas. Se ve entonces que la solución básica inicial es:

$$y_1 = 0;\ y_2 = 0;\ y_3 = 0;\ y_4 = -6;\ y_5 = -10$$

Esta solución no es factible por tener valores negativos, se requiere entonces el desarrollo del proceso iterativo.

Fase 2: procedimiento iterativo.

Primera iteración

Paso 1 de la primera iteración: se identifica a y_5 como la variable básica saliente, debido a que tiene el valor más negativo entre las actuales variables básicas.

Paso 2 de la primera iteración: se identifica a y_2 como la variable básica entrante, esto en razón a que el cociente de su coeficiente en la fila F_0 por su coeficiente en la fila de la variable saliente arroja el numero con menor valor absoluto.

Paso 3 de primera iteración: determinación de la nueva solución básica. Las nuevas variables básicas son entonces y_4 y y_2, por tanto se lleva la tabla 6.x a la forma apropiada mediante procedimientos de eliminación gaussiana, con lo que se obtiene la tabla 12.

Fila	V. Básicas	Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
$\boldsymbol{F_0}$	$\boldsymbol{Z}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{-60}$
F_1	y_4	0	-1	0	-3	1	0	-6
F_2	y_2	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	5

Tabla 12. Tabla de la primera iteración

Fuente: Propia.

De la tabla 5.12 se ve que la solución básica es entonces:

$$y_1 = 0;\ y_2 = 5;\ y_3 = 0;\ y_4 = -6;\ y_5 = 0$$

Esta solución no es factible porque contiene valores negativos entre sus variables básicas, se requiere una nueva iteración.

Segunda iteración

Paso 1 de la segunda iteración: ahora la variable básica saliente es e identifica a y_4 (es la única variable básica que tiene valor negativo en la tabla 12).

Paso 2 de la segunda iteración: siguiendo el debido criterio de cociente de menor valor absoluto se identifica a y_3 como variable básica entrante.

Paso 3 de segunda iteración: determinación de la nueva solución básica. Las nuevas variables básicas son entonces y_3 y y_2. Llevando la tabla 5.12 a la forma apropiada se obtiene la tabla 13.

Fila	V. Básicas	Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	b_i
$\boldsymbol{F_0}$	$\boldsymbol{Z}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{-72}$
F_1	y_3	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	2
F_2	y_2	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	3

Tabla 13

Fuente: Propia.

De la tabla 13 se ve que la solución básica es entonces:

$$y_1 = 0;\ y_2 = 3;\ y_3 = 2;\ y_4 = 0;\ y_5 = 0$$

Esta solución es factible y óptima.

Unidad 3

Fundamentos de Programación Lineal entera

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

Introducción

Hasta la semana cinco hemos tenido la oportunidad de trabajar alrededor de una de las áreas más utilizadas en Investigación de operaciones, la programación lineal, habiendo visto que el mayor fundamento está en el uso del Método Simplex. Destacamos en ello que los problemas están asociados con restricciones que pueden expresarse como relaciones lineales entre las variables de decisión y que esas mismas variables generalmente se encuentran sometidas a restricciones de no negatividad. Sin embargo, vale anotar que, en el ámbito de los problemas propios de la investigación de operaciones, y de la programación lineal particularmente, se encuentran problemas en los cuales las variables de decisión se encuentran sometidas, además de las restricciones estructurales y de no negatividad, a tomar valores enteros, lo que da lugar al uso de técnicas específicas de programación lineal, conocidas como programación lineal entera.

En esta cartilla 6, dedicaremos nuestros esfuerzos al trabajo alrededor de principios propios de la programación lineal entera. Quizá el estudiante se pregunte por qué abordar técnicas nuevas, si al fin y al cabo se trata de un problema de programación lineal, el cual se podría resolver mediante el Método Simplex. Sin embargo aunque parezca simple, la complejidad que introduce las restricciones que obligan a la toma de valores enteros, es bastante considerable, por lo que se hace necesario el uso de la programación lineal entera o PLE.

En el desarrollo de la cartilla se presenta inicialmente el contexto general de la PLE, se plantea ejemplos de formulación y modelado, algunas áreas de aplicación y un método de solución de amplia acogida. Se resalta que en la práctica los problemas de programación lineal entera generalmente involucran un gran número de variables y se resuelven mediante el uso de aplicaciones computacionales elaboradas con base en estos principios, por lo cual los detalles expuestos aquí se dan con fines de ilustración sobre el funcionamiento de las herramientas tecnológicas y la importancia de la investigación de operaciones en la solución de problemas.

Recomendaciones metodológicas

Las recomendaciones básicas, al igual que en semanas anteriores, se refieren a la cuidadosa lectura de los contenidos de esta cartilla, al mismo tiempo o al final de la misma se deben revisar los recursos adicionales ofrecidos en el módulo para esta semana.

Las lecturas complementarias dan al estudiante la oportunidad de revisar la solución de ejercicios resueltos que refuerzan las exposiciones hechas en la cartilla, aprovechar este recurso es una buena estrategia de cercamiento al alcance de los objetivos propuestos También se recomienda la visualización de los ejercicios y contenidos ilustrados en los videos cuyos enlaces son ofrecidos a través de la sección de video capsulas, estos videos proporcionan explicaciones vivas del tema y solución de problemas.

Frente a la necesidad y pertinencia, dentro de todo proceso de aprendizaje, de enfrentarse a desafíos a través de los cuales pueda verificar para sí mismo la apropiación de los contenidos, se presenta la sección ejercicios de repaso, en la cual se encuentra ejercicios propuestos sobre la temática de esta cartilla. Se recomienda al estudiante tener presente el material del video resumen de esta semana.

Desarrollo temático

Fundamentos de Programación Lineal entera

Problemas de Programación Lineal entera

El paso conceptual del modelado de un problema de programación lineal, estudiada hasta la semana anterior, a la programación lineal entera es bastante sencillo desde el punto de vista de la formulación, sin embargo la solución resulta significativamente diferente e incluso más intensiva desde el punto de vista computacional. En general un problema de programación lineal entera o PLE, es un problema de programación lineal en el que algunas de las variables de decisión involucradas están limitadas a tomar solo valores enteros. Si el problema involucra variables enteras y no enteras se dice que es un problema de programación lineal mixto, ejemplo de ello es el ilustrado en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.1: modelo de un problema de programación lineal entera mixto.

$$Maximizar\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}^+$$

En los casos en que todas las variables de decisión solo pueden tomar valores enteros, se dice que el problema es de programación lineal entera puro. Un ejemplo de modelo de este tipo de modelo se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.2: modelo de un problema de programación lineal entera puro.

$$Maximizar\ Z = 4x_1 + 2x_2$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \ \in \mathbb{Z}^+$$

En algunos casos los valores de las variables están limitados aún más, y solo pueden tomar valores 0 o 1, o lo que comúnmente se conoce como decisiones del tipo Sí o No, en cuya situación el problema correspondiente se clasifica como problema de programación lineal entera binario (PLEB). A continuación se presenta un ejemplo de modelo de programación lineal entera binario (PLEB).

Ejemplo 6.3: modelo de un problema de programación lineal entera binario.

$$Maximizar\ Z = 2x_1 - x_2$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \ \in \{0, 1\}$$

Formulación y modelado de problemas de PLEB

En esta subsección se formula y analiza un problema que puede modelarse y resolverse como un problema de programación lineal entera y binara. En la realidad el tipo de problemas que se presenta contempla muchas más variables y restricciones pero, aunque este es un problema muy sencillo, se presenta con fines de ilustrar el contexto propio del área de PLEB. El problema es el siguiente:

Ejemplo 6.4:

La Fundación Universitaria del Área Andina ha venido adelantando un ambicioso programa de expansión para hacer llegar sus servicios a otras regiones del país en que quiere hacer mayor presencia actualmente está considerando la posibilidad de abrir nuevas sedes bien sea en la ciudad de Cartagena (departamento de Bolívar) o en Florencia (Caquetá). Adicionalmente, y con el fin de hacer mayor divulgación y promoción de sus programas de formación en la modalidad virtual, piensa abrir no más de un Centro de Servicios al Usuario (CSU), en un municipio del departamento relativamente alejado de alguna ciudad donde abra sede. Los estudios realizados indican que el monto requerido para la construcción y apertura de la sede en Cartagena tiene un valor de 18 mil millones de pesos, mientras que en Florencia sería de 9 mil millones de pesos, por otro lado, si se crea el CSU en otro municipio del departamento de Bolívar, este tendría un costo de 15 mil millones de pesos, en cambio en otro municipio del departamento de Caquetá el costo sería de 6 mil millones. Además de lo anterior los mismos estudios indican que las inversiones que se realicen darían a la FUAA un beneficio representado en la valorización de tal manera que los valores presentes netos de los resultados de las inversiones serían de 27 mil millones la construcción y apertura de la sede de Cartagena, 15 mil millones la sede de Florencia, 18 mil millones el CSU en otro municipio de Bolívar y 12 mil millones en otro municipio de Caquetá. La junta directiva ha establecido en 30 mil millones de pesos el monto límite de inversión total, pero se quiere invertir de tal forma que se obtenga el máximo posible de valor presente neto de sus inversiones, para lo cual se requiere analizar cuál es la mejor forma de realizar la inversión.

Modelado como un problema de PLEB

Se inicia seleccionando un conjunto de variables asociadas, referidas a la creación de una sede en alguna de las ciudades y una CSU en otro municipio, estas variables son:

$x_1 = Creación\ de\ la\ sede\ en\ Cartagena.$

$x_2 = Creación\ de\ la\ sede\ en\ Florencia.$

$x_3 = Creación\ del\ CSU\ en\ el\ departamento\ de\ Bolivar.$

$x_4 = Creación\ del\ CSU\ en\ el\ departamento\ de\ Caquetá.$

Cada variable tomará un valor de 0 o 1, respectivamente, según la decisión sea Sí o No crear la correspondiente sede o CSU, es decir:

$$x_j = \begin{cases} 1 \; si \; la \; j - esima \; decisión \; es \; Sí \\ 0 \; i \; la \; j - esima \; decisión \; es \; No \end{cases}$$

La tabla 1 resume los datos del problema, las cantidades de dinero se expresan en millones.

Índice j	Posible decisión	Variable x_j	Presente neto	Monto a invertir
1	Crear sede en Cartagena	x_1	27000	18.000
2	Crear sede en Florencia	x_2	15.000	9.000
3	Crear CSU en Bolívar	x_3	18.000	15.000
4	Crear CSU en Caquetá	x_4	12.000	6.000

Tabla 1

Fuente: Propia.

El objetivo es tener el máximo del valor presente neto total, es decir, se quiere maximizar la función:

$$Z = 27.000x_1 + 15.000x_2 + 18.000x_3 + 12.000x_4$$

El costo de optar o no por cada alternativa es igual al costo de la misma por el valor de la respectiva variable de decisión x_j, dependiendo si el valor de x_j es 1 o 0. Si además se tiene en cuenta que la FUAA cuenta con un límite de inversión de 30 mil millones de pesos, una de las restricciones es:

$$18.000x_1 + 9.000x_2 + 15.000x_3 + 6.000x_4 \leq 30.000$$

Dado que a lo sumo se creará un CSU, se tiene entonces que la suma de las variables x_3 y x_4 máximo 1, lo que da la segunda restricción:

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Además de lo anterior debemos tener en cuenta que la posibilidad de crear el CSU en Bolívar ($x_3 = 1$) depende de la creación de la sede en Cartagena ($x_1 = 0$), aunque esto no lo implica, por tanto el valor de x_3 no puede superar al de x_1. Situación similar se aplica a la posibilidad de crear el CSU en el Caquetá, dependiendo si se crea o no la sede en Florencia. Con este razonamiento tenemos dos restricciones más, estas son:

$$x_3 \leq x_1 \; o \; -x_1 + \; x_3 \leq 0 \text{ y } x_4 \leq x_2 \; o \; -x_2 + \; x_4 \leq 0$$

En resumen, el modelo del problema es:

$$Maximizar\ Z = 27.000x_1 + 15.000x_2 + 18.000x_3 + 12.000x_4$$

$$Sujeto\ a:$$

$$18.000x_1 + 9.000x_2 + 15.000x_3 + 6.000x_4 \leq 30.000$$

$$x_3 + \; x_4 \leq \; 1$$

$$-x_1 \; + \; x_3 \; \leq \; 0$$

$$-\,x_2 \; + \; x_4 \leq \; 0$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \; para \; j = 1, 2, 3\ ,4 \; y \; x_j \; entero$$

De lo planteado hasta ahora con base en el enunciado y formulación del modelo podemos extraer algunos de los elementos generales de la programación lineal entera binaria, por ejemplo, son situaciones en las cuales se toman decisiones del tipo Sí o No. Además, algunos grupos de decisiones son alternativas mutuamente excluyentes, de tal manera que una decisión positiva dentro de las variables del grupo obliga a que las demás sean negativas. En el caso del ejemplo 6.1 esto se da con las variables x_3 y x_4. En el caso general de estos grupos de decisiones, si a lo sumo una sola de las decisiones puede ser Sí, se tiene una restricción específica en que la suma de las variables correspondientes debe ser menor o igual a 1. Si obligatoriamente una de ellas es positiva y las demás negativas, la suma debe ser exactamente 1. Por otro parte en el contexto de la PLEB encontramos decisiones contingentes o que dependen de decisiones anteriores. En nuestro ejemplo este tipo de decisiones se evidencia en el hecho que las variables x_3 y x_4, respectivamente, pueden ser 1 si y solo si las variables x_3 y x_4 también valen 1.

Áreas de aplicación de Programación Lineal Entera Binaria

En esta sección de la presente cartilla se describe brevemente algunas de situaciones de aplicación de programación entera binaria en los que se asigna variables de decisión x_j definidas mediante:

$$x_j = \begin{cases} 1\ si\ se\ decide\ en\ favor\ de\ la\ alternativa\ j. \\ 0\ si\ no\ se\ se\ decide\ en\ favor\ de\ la\ alternativa\ j. \end{cases}$$

Aplicación en análisis de inversión

El problema correspondiente al ejemplo 6.4 es un caso de aplicación de la PLEB en análisis de inversión, en casos como este las decisiones a tomar no se referían al monto de dinero a invertir, sino a la conveniencia de invertir en una u otra alternativa. Afirmamos, amparados en el ejemplo, que no se decide el monto a invertir debido a que las cantidades a invertir en un proyecto, o una nueva sede, o la compra de determinados equipos ya están fijadas o definidas, con lo cual el problema es realmente decidir si se invierte o no una cantidad fija. Se tiene entonces en general que la administración se enfrenta a la necesidad de toma de decisiones del tipo Sí o No.

Ejemplo 6.5

Una compañía colocadora de inversiones analiza cuatro posibles modalidades de invertir capital captado de los ahorros de sus clientes. La primera posibilidad está asociada con un valor presente neto de $48.000.000, la segunda con $66.000.000, la tercera posibilidad de inversión puede dar un valor presente neto de \$36.000.000 y la cuarta de \$24.000.000. El capital inicial a invertir en cada una de las posibilidades es de \$15.000.000, \$21.000.000, \$12.000.000 y S9.000.000, respectivamente. Además de lo anterior, los analistas económicos consideran que si se invierte en la segunda opción también debe hacerlo en la primera, y que no se puede invertir en más de tres opciones. Se sabe que el fondo máximo a invertir es de \$42.000.000. La empresa solicita a su equipo de investigación de operaciones que formule un modelo que refleje el interés de la empresa de obtener el mayor beneficio posible.

El equipo de investigación de operaciones observa que este es un problema en el cual se debe decidir sí invertir o no en una u otra posibilidad, por lo cual establece cuatro variables de decisión definidas mediante:

$$x_j = \begin{cases} 1 \; si \; se \; realiza \; la \; inversión \; j \\ \quad Para \; j = 1, 2, 3, 4 \\ 0 \; si \; no \; se \; reliza \; la \; inversión \; j \end{cases}$$

La finalidad es obtener el mayor rendimiento posible, el cual está dado en términos del valor presente neto que llegue a producir cada una de las opciones que se haga, por tanto el objetivo es maximizar la función

$$Z = 48.000.000x_1 + 66.000.000x_2 + 36.000.000x_3 + 24.000.000x_4$$

Como el capital total a invertir está limitado a \$42.000.000 se tiene la restricción estructural:

$$15.000.000x_1 + 21.000.000x_2 + 12.000.000x_1 + 9.000.000x_1 \leq 42.000.000.$$

Como la compañía está limitada a realizar inversiones máximo en tres posibilidades y si se invierte en la segunda posibilidad obligaría a invertir también en la primera, se configura las siguientes restricciones adicionales:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_2 \geq x_1$$

Finalmente las variables x_j solo pueden tomar los valores 0 o 1, el modelo resultante es:

$Maximizar\ Z = \ 48.000.000x_1 + 66.000.000x_2 + 36.000.000x_3 + 24.000.000x_4$

$Sujeto\ a$:

$15.000.000x_1 + 21.000.000x_2 + 12.000.000x_1 + 9.000.000x_1 \leq 42.000.000.$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3$

$x_2 \geq x_1$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;$$

Ejemplo 6.6

Una empresa productora de prendas de vestir: faldas, pantalonetas y pantalones. La elaboración de cada unidad de cada tipo de prenda necesita la aplicación de procesos en máquinas especializadas que se toman en arriendo, los costos de arriendo mensual son de 600 mil pesos para la usada en la elaboración de falda, 450 mil pesos para la de pantalonetas y 300 mil pesos para la de pantalones. En cuanto a las cantidades de tela se tiene que las cantidades de tela por unidad y las horas de mano de obra son las que se presentan en el cuadro. El mismo cuadro muestra los precios unitarios de venta y costo de producción de cada prenda.

	Horas de mano de obra	Mts^2 de tela	Costo unitario de producción	Precio unitario de venta
Faldas	3	4	\$ 18.000.00	\$ 36.000.00
pantalonetas	2	3	\$ 12.000.00	\$ 24.000.00
pantalones	6	4	\$ 24.000.00	\$ 45.000.00

Además se sabe que se dispone de 150 horas de mano de obra al mes y 160 metros cuadrados de tela. Para plantear un modelo cuya solución lleve a obtener la mayor ganancia posible se realiza las siguientes consideraciones.

x_1 = número de faldas a producir en el mes.

x_2 = número de pantalonetas a producir en el mes.

x_3 = número de pantalones a producir en el mes.

Teniendo en cuenta que el arriendo de las máquinas depende de la prenda específica, se requiere el uso de variables binarias que indiquen la decisión de arrendar o no la respectiva máquina, estas variables se definen mediante:

$$y_j = \begin{cases} 1 \; si\ se\ toma\ en\ arriendo\ la\ maquina\ j \\ \qquad\qquad para\ j = 1, 2, 3. \\ 0 \; en\ caso\ de\ no\ tomar\ la\ máquina\ en\ arriendo \end{cases}$$

Es claro que si se arrienda la maquina y_j es porque ha de usarse en la producción de prendas del tipo j, por tanto $x_j > 0$. Si la máquina y_j no se arrienda, entonces $x_j = 0$. Con base en esto se tiene las restricciones:

$$x_1 \leq k_1 y_1$$

$$x_2 \leq k_2 y_2$$

$$x_3 \leq k_3 y_3$$

Donde los valores de k_1, k_2, k_3 son números lo suficientemente grande para limitar los valores de x_1, x_2, x_3. La función objetivo es la diferencia éntrelos ingresos recibidos y los gastos en que se incurre, se tienen entonces que:

$$Z = 36.000x_1 + 24.000\ x_2 + 45.000x_3 - (18.000x_1 + 12.000\ x_2 + 24.000x_3) - (600.000y_1 + 450.000\ y_2 + 300y_3)$$

$$Z = 18.000x_1 + 12.000\ x_2 + 21.000x_3\ - 600.000y_1 + 450.000\ y_2 + 300.000y_3$$

Las restricciones relacionadas con la disponibilidad de mano de obra y de tela son respectivamente:

$$\mathbf{3x_1 + 2\,x_2 + 6x_3 < 150}$$

$$\mathbf{4x_1 + 3\,x_2 + 4x_3 < 160}$$

En este caso, atendiendo a las condiciones del problema, el valor de 100 para $k_1, k_2\ y\ k_3$ es suficiente para acotar los posibles valores de $x_1, x_2\ y\ x_3$. Por tanto el modelo del problema se resume en:

$$Maximizar\ Z = 18.000x_1 + 12.000\,x_2 + 21.000x_3\ - 600.000y_1 + 450.000\,y_2 + 300.000y_3$$

$$Sujeta\ a:$$

$$3x_1 + 2\,x_2 + 6x_3 < 150$$

$$4x_1 + 3\,x_2 + 4x_3 < 160$$

$$x_1 \leq 100y_1$$

$$x_2 \leq 100y_2$$

$$x_3 \leq 100y_3$$

$$x_1, x_2, x_3\ \in \mathbb{Z}^+$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

Selección de sitios en los cuales invertir

Tal como sucede con el contexto del problema del ejemplo 6.4, muchas empresas que buscan su expansión, consideran posibilidades de creación de plantas o apertura de sedes en diferentes sitios geográficos considerando las ventajas que pueda dar un sitio u otro. La selección del sitio demanda un detallado análisis que permita soportar la decisión del tipo

$$x_j = \begin{cases} 1 \; si \; se \; selecciona \; el \; sitio \; j \\ 0 \; si \; no \; se \; selecciona \; el \; sitio \; j \end{cases}$$

Relajación de un problema de programación lineal entera

Ya hemos comentado acerca de la similitud entre las formulaciones entre los problemas de programación lineal y los de programación lineal entera, pero los problemas de PLE están más restringidos ya que las variables de decisión solo pueden tomar valores enteros. Dado que el conjunto de soluciones de un problema de PLE está limitado al conjunto de enteros positivos, podría pensarse en una técnica de enumeración de todas las posibles soluciones y analizar cuáles de estas resultan óptimas, sin embargo esto no es conveniente en problemas con un significativo número de variables de decisión, ya que el número de soluciones factibles llega a ser inmanejable, por tanto se hace necesario adoptar técnicas que apunten hacia la consecución de las mejores soluciones de manera eficiente.

Frente a la eficiencia del Método Simplex, una importante tendencia en el campo de soluciones de problemas de PLE es la técnica de relajamiento, según la cual a partir de un problema de PLE se formula un problema de programación lineal eliminando las restricciones asociadas con el carácter entero de la variables de decisión, a este problema de programación lineal (PL) derivado del problema de programación lineal entera (PLE) se le conoce como la relajación del PLB, el término relajación se refiere a la mayor flexibilidad en cuanto al conjunto de valores que puede tomar las variables. A manera de ejemplo se presenta…

La formulación y solución de problema relajado de un PLE resulta de gran utilidad como parte del método de solución conocido como Ramificación y Acotamiento, que es uno de los más importantes procedimientos de solución de problemas de programación lineal entera. El método de ramificación y acotamiento se estudia en la siguiente sección.

Método de ramificación y acortamiento para resolver problemas de PLE

El método de ramificación y acotamiento se fundamenta en el principio de dividir un problema original de gran tamaño, y difícil de resolver como un todo, en un mayor número de problemas pequeños más fáciles de resolver. Esta idea se puede trabajar en varios niveles, es decir, se divide el gran problema en problemas más pequeños y cada uno de estos a su vez se puede dividir en otros más simples. La ramificación consiste en establecer una partición del conjunto de soluciones factibles del problema original, mientras que el acotamiento de la solución facilita el descarte de subconjuntos que violen el límite.

El método de ramificación y acotamiento hace uso de la técnica de relajación descrita en la sección anterior, la valides de uso de la técnica de relajación radica en que, una vez resuelta la relajación, su solución constituye una cota para el problema de PLE debido a que la solución óptima del problema de PLE no puede ser mejor que el de la relajación.

Existen procedimientos particulares del método para resolver problemas de programación lineal entera binaria y mixta, pero en el mundo real se acude generalmente a paquetes de software que arrojan la solución a partir de la formulación de un modelo. En esta sección, con fines de ilustración de la lógica que hay detrás del método, abordamos el caso de PLE a partir de un pequeño conjunto de sencillos ejemplos.

Ejemplo 6.5:

$$Maximizar\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$Sujeto\ a:$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \ \in \mathbb{Z}^+$$

Al resolver la relajación de este modelo mediante el método de programación lineal se obtiene como solución $x_1 = 0, x_2 = 6, Z = 12$. (El problema relajado fue propuesto como un ejercicio de repaso en la semana 2). En este caso la solución del PLB coincide con la de su relajación debido a los valores de las variables son enteros.

Ejemplo 6.6:

Una empresa fabricante de muebles produce mesas y sillas, en cuanto a tiempo de trabajo, cada mesa y cada silla demandan una hora, mientras que en lo que se refiere a materia prima, las mesas y sillas requieren de 9 y 5 pies cuadrados de madera por unidad respectivamente. Se sabe que se dispone de 6 horas de mano de obra y 45 pies cuadrados de madera, también se tiene que la utilidad dada por una mesa es de 8 dólares, y la de una silla es de 5 dólares. Se pide formular y resolver el modelo que otorgue la mayor utilidad posible a la mueblería.

Solución:

Sea:

$$x_1 = Cantidad\ de\ mesas\ a\ fabricar$$

$$x_2 = Cantidad\ de\ sillas\ a\ fabricar$$

La utilidad que se pueda obtener está dada por la función objetivo $Z = 8x_1 + 5x_2$, la limitante en tiempo de horas de trabajo corresponde a $x_1 + x_2 \leq 6$, mientras que los recursos de madera están limitados por $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ y, teniendo en cuenta que los valores x_1, x_2 deben ser enteros, el correspondiente modelo de programación lineal entera es y su relajado, al que llamamos subproblema 1, son los siguientes:

$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+$	$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$
Modelo original del problema de programación lineal entera	**Subproblema 1: Modelo relajado del problema original**

Tabla 2

Fuente: Propia.

El modelo relajado corresponde a un ejercicio de repaso propuesto en la semana 2, si no lo ha resuelto es recomendable que lo haga con fines de verificación, su solución es:

$$x_1 = \frac{15}{4};\ x_2 = \frac{9}{4}\ ;\ Z = \frac{165}{4} = 41{,}25$$

Lo que indica que el máximo valor que podría alcanzar la función objetivo del problema original, restringido a valores enteros es valor hallado para la función objetivo del problema relajado es $Z = 41$.

Ahora lo que sigue es establecer una partición del conjunto de soluciones factibles del modelo relajado. La partición se puede establecer de forma arbitraria, pero teniendo en cuenta que para el caso de la variable x_1 su valor en la solución óptima es mayor que 3, podemos usar una partición que involucre este valor, con lo que tenemos las restricciones $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$, (se toma $x_1 \geq 4$ porque para el problema entero no tiene sentido tomar valores en (3, 4)). Con lo anterior el subproblema 1 se divide en los subproblemas 2 y 3 ilustrados a continuación.

$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \leq 3$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$	$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$ $x_1 \geq 4$
Subproblema 2: derivado del subproblema 1 adicionando la restricción $x_1 \leq 3$	**Subproblema 3: derivado del subproblema 1 adicionando la restricción $x_1 \geq 4$**

Tabla 3

Fuente: Propia.

El subproblema 2 fue propuesto como un ejercicio de repasos en las semanas 1 y 2, su solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$, con lo cual el valor de la función objetivo es $Z = 39$, situación en la que se cumple el hecho que las variables de decisión tomen valores enteros, lo que hace de esta una solución candidata, pero cualquier subdivisión de este problema no puede dar una mejor solución.

Como es posible encontrar un mejor valor de Z (40 o 41), debemos resolver el subproblema 2, el cual fue propuesto como ejercicio de repaso en las semanas 1 y 2, su solución es $x_1 = 4$ y $x_2 = \frac{9}{5}$, dando a la función objetivo el valor $Z = 41$.

Como la solución del subproblema 2 no da en valores enteros, es necesario dividirlo en dos nuevos subproblemas, para ello consideramos ahora que el valor $x_2 = \frac{9}{5}$ nos sugiere tomar las particiones $x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$, teniéndose los subproblemas 4 y 5.

$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a:$ $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0,\ x_2 \leq 1$	$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a:$ $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$
Subproblema 4: derivado del subproblema 3 adicionando la restricción $x_2 \leq 1$	**Subproblema 5: derivado del subproblema 3 adicionando la restricción $x_2 \geq 2$**

Tabla 4

Fuente: Propia.

La solución del subproblema 4 es $x_1 = \frac{40}{9}$ y $x_2 = 2$, dando $x_2 = 1$ y $Z = \frac{365}{9} = 40{,}556$ la cual no es una solución factible para el modelo de PLE. En cuanto al subproblema 5, se encuentra que no hay valores que satisfagan el subproblema 3 y al mismo tiempo la restricción $x_2 \geq 2$, por tanto es necesario dividir el subproblema 4, en dos nuevos subproblemas, con el fin de hallar una solución mejor que la del subproblema 2 (Z=39) e inferior que $Z = \frac{365}{9} = 40{,}556$.

Del subproblema 4 tenemos $x_1 = \frac{40}{9} \cong 4{,}44$, lo que sugiere considerar las nuevas restricciones $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$ para definir los nuevos subproblemas.

$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0, x_2 \leq 1$	$Maximizar\ Z = 8x_1 + 5x_2$ $Sujeto\ a$: $x_1 + x_2 \leq 6$ $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$
Subproblema 6: derivado del subproblema 5 adicionando la restricción $x_1 \leq 4$	**Subproblema 7: derivado del subproblema 5 adicionando la restricción $x_1 \geq 5$**

Tabla 5

Fuente: Propia.

La solución del subproblema 6 es $x_1 = 4, x_2 = 1$, lo que resulta en $Z = 37$, esta solución, si bien es factible, se debe descartar porque no es mejor que la solución factible del subproblema 2, en consecuencia, una mejor alternativa de solución se debe explorar por la vía del subproblema 7, del cual se tiene como única solución posible $x_1 = 5, x_2 = 0$, correspondiendo a un valor $Z = 40$, que es mejor que el valor óptimo hallado hasta el momento ($Z = 39$) y no puede ser mejorado porque estaríamos particionando un conjunto vacío de soluciones. En conclusión, la solución óptima del problema original de programación lineal entera es la correspondiente a la solución del subproblema 7.

4

Unidad 4

Introducción al problema del transporte

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

Introducción

A lo largo de las cartillas anteriores en este curso hemos tenido la oportunidad de abordar la programación lineal como una de las ramas fundamentales de la investigación de operaciones, de la misma forma hemos encontrado situaciones que corresponden a casos particulares de programación lineal, específicamente los que se enmarcan en el campo de la programación lineal entera, lo que as u vez da lugar a la consideración de procedimientos especiales distintos al Método Simplex. En esta cartilla iniciamos el estudio introductorio de un tipo de problemas que, si bien puede tratarse desde la perspectiva de la programación lineal entera, dada su estructura se aborda desde una variante especial del Método Simplex. El problema se conoce como problema del transporte y el método de solución es el Método Simplex de transporte. Debe aclararse que la denominación de problema de transporte no lo convierte en un contexto exclusivo del traslado de elementos físicos, veremos cómo diferentes problemas distintos se pueden modelar como un problema del transporte.

El estudio de los contenidos inicia presentando las características generales del contexto del problema del transporte, a partir de lo cual se puede establecer su formulación o modelado como un problema de programación lineal. Realizadas las consideraciones a que diere lugar el enunciado o situaciones particulares, se aborda la primera parte del procedimiento de solución, la cual consiste en la obtención de una solución básica factible inicial, tal como se requiere en la aplicación del Método Simplex, pero en este caso se realiza mediante el uso de tres alternativas aquí consideradas. La solución completa de problemas de transporte se estudiará e ilustrará en la octava cartilla.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda aquí como en todas las cartillas anteriores la el cuidadosa revisión y análisis de la está cartilla y siempre tener presente que se puede complementar con los restantes recursos y actividades planteados desde esta parte del curso.

Las lecturas complementarias contienen situaciones resuelta en relación a la aplicación de los métodos estudiados para obtener una solución inicial, mientras que los ejercicios de repaso contemplan actividades que complementan el desarrollo de los temas. Por otro lado los videos propuestos como video capsulas explican de forma detallada solución de problemas relacionadas con las temáticas.

Componente importante del desarrollo de esta semana se relaciona con la actividad evaluativa, la cual consiste en el desarrollo de un taller y la presentación de un quíz, a través del cual se evalúa el mismo. El desarrollo del taller y su evaluación constituye un importante elemento de preparación para la presentación de la evaluación final que se debe presentar al final del curso la próxima semana.

Desarrollo temático

Introducción al problema del transporte

El problema del transporte

Hemos visto en los primeros capítulos que la programación lineal es un área fundamental de la investigación de operaciones, también vimos en la semana 5 que un conjunto especial de problemas de programación lineal se enmarcan en la programación entera. Otra de las áreas de la investigación de operaciones corresponde a lo que se conoce como **Problema del transporte**, de lo que inicialmente vale la pena decir que en realidad es un tipo especial de problemas de programación lineal, esto debido a que a partir de la formulación del problema se puede modelar como un problema de programación lineal, y que se podría resolver mediante el uso del Método Simplex, sin embargo, por ciertas particularidades del modelo subyacente, se aplica otros procedimientos específicos en la búsqueda de la solución. Aunque en el contexto general el estudio que abordamos se conoce como problema de transporte, no siempre se refiere a situaciones de transporte en el sentido que lo conocemos, su nombre se debe a que los diferentes problemas de esta área se pueden modelar como si se tratara de enviar cantidades de productos desde m puntos de origen hasta n puntos de destino. Para efectos de ilustrar parte del contexto de problemas de transporte se presenta a continuación la formulación de un sencillo problema de este tipo.

Ejemplo 7.1

Una panadería en la ciudad de Bogotá tiene dos sucursales $S_1\ y\ S_2$ en las que se elabora los productos para vender en tres puntos de venta P_1, P_2 y P_3. La oferta de la sucursal S_1 es de 2000 unidades de productos, la de la sucursal S_2 es de 2500. La demanda en el punto de venta P_1 es de 1500 unidades, la del punto P_2 es de 2000 y la del punto P_3 es de 1000 unidades, además de lo anterior, los costos de envío desde la sucursal S_1 hacia los puntos P_1, P_2 y P_3 son respectivamente 8, 6 y 10, mientras que desde la sucursal S_2 los respectivos costos son 10, 4 y 9. El problema a resolver consiste en hallar la política de envío que tenga el menor costo tratando de satisfacer la demanda. Con este fin definimos los siguientes términos:

$$x_{ij} = unidades\ enviadas\ desde\ la\ sucursal\ S_i\ (i = 1, 2) hasta\ el\ punto\ P_j\ (j = 1, 2, 3)$$

El costo total de envío estaría dado por:

$$Z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

Por tanto, atendiendo a la cantidad total de unidades que se ofrece desde cada sucursal S_1, S_2 y a las necesidades demandadas desde los puntos de venta P_1, P_2, P_3 se tiene la siguiente formulación del problema (en que las restricciones son de igualdad porque la cantidad de unidades ofrecidas es igual a la demandada):

$$Minimizar\ Z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 10x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \ = 2000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \ = 2500$$

$$x_{11} \ + x_{21} \ = 1500$$

$$x_{12} \ + x_{22} \ = 2000$$

$$x_{12} \ + x_{22} \ = 1000$$

$$x_{ij} \geq 0, para\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$$

Siguiendo algunas de las ideas asociadas con el tratamiento del Método Simplex tenemos la representación matricial de la situación.

La función Z se puede expresar como el producto del vector $\boldsymbol{c}$ compuesto por los coeficientes de las variables en la función objetivo y el vector columna cuyas componentes son las variables de decisión, es decir:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{cX} = [\mathbf{8}, \mathbf{6}, \mathbf{10}, \mathbf{10}, \mathbf{4}, \mathbf{9}]\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = [x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}\ x_{23}\ ]$$

Por otro lado el conjunto de restricciones se expresa mediante la siguiente ecuación matricial, en la que hemos resaltado algunos elementos.

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \quad = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2500 \\ 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$x_{ij} \geq 0, para\ i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3$$

Observamos particularmente que las dos primeras filas de la matriz A corresponden a los coeficientes de las variables de decisión, en las ecuaciones de restricción, asociadas con las cantidades enviadas desde cada sucursal, mientras que las otras tres filas corresponden a los coeficientes de cantidades recibidas por cada punto de venta desde las sucursales.

A partir de los datos de la formulación y de la notación empleada, se tiene en la tabla 1 un resumen de costos de envío, cantidades ofrecidas por las sucursales y cantidades requeridas por los puntos de venta.

Datos de costos de envío, oferta y demanda				
S_i \ P_j	P_1	P_2	P_3	$Oferta$
S_1	8	6	10	2000
S_1	10	4	9	2500
$Demanda$	1500	2000	1000	

Tabla 1.

Fuente: Propia.

Veremos posteriormente que la tabla resumen dejará ver la estructura genérica del problema.

Modelo general de problemas de transporte

La notación usada en el ejemplo 7.1 se puede extender para considerar el caso general de problemas que se pueden modelar como problemas de transporte, es decir como si se tratara de la necesidad de distribuir algún tipo de mercancía o producto desde varios puntos de origen hasta diferentes puntos de destino, asumiendo cierto costo por el transporte de la mercancía entre orígenes y destinos, de tal manera que los costos totales sean lo menor posible.

En general se considera que hay determinadas cantidades o unidades de producto a distribuir, que existen m puntos de origen, n puntos de destino, también se tiene que S_i es la cantidad de unidades de producto que pueden ser distribuidas desde el origen O_i, d_j es la cantidad de unidades de producto requeridas o demandadas en el destino D_j y el costo de distribución de cada unidad desde el origen O_i hasta el destino D_j está dada por c_{ij}. Se puede ver que los datos o parámetros fundamentales del modelo son los valores de las demandas de los diferentes destinos, la oferta de los puntos de origen y los costos unitarios de envío entre origen y destino.

En el modelo que se describe se asume que cada uno de los puntos de origen cuenta con una cantidad constante de unidades a distribuir totalmente entre los destinos y que desde cada destino se requiere una cantidad constante de unidades que debe satisfacerse por los puntos de origen, lo que significa que la totalidad de unidades ofrecidas y requeridas deben ser iguales, a esta particularidad se le conoce como propiedad de existencia de solución factible. La realidad de problemas en ciertos casos muestra que los valores de S_i corresponden a cantidades máximas que se podrían distribuir desde el punto de origen O_i

o los valores de d_j son cantidades máximas que podrían ser recibidas por el destino D_j. En estos casos es necesario realizar ajustes consistentes en la suposición de un origen ficticio o destino ficticio de las diferencias entre lo real y los valores máximos. (Un breve tratamiento a problemas con origen y destino ficticio se tratará más adelante en esta misma cartilla). Otro supuesto razonable en el planteamiento de un modelo se refiere a la directa proporcionalidad entre el costo de envío y la cantidad de unidades enviadas, es decir, el costo de envío de x_{ij} unidades desde el origen O_{ij} hasta el destino D_j es el producto $c_{ij}x_{ij}$.

Descripción o planteamiento del modelo

La organización de los datos o parámetros del problema del ejemplo 7.1 en tabla 7.1, correspondientes a la distribución de productos de panadería, permite extender la misma idea al caso general de situaciones que se pueden modelar como problemas de transporte, en los que se quiere minimizar el costo total de distribución asumiendo la igualdad entre oferta y demanda, así como la directa proporcionalidad entre los costos totales de envío, entre un origen y un destino, y el respectivo costo unitario. La correspondiente tabla genérica es la tabla 2.

Parámetros fundamentales del problema (costos unitarios, ofertas y demandas)					
D_j / O_i	D_1	D_2	$\dots$	D_n	$Oferta$
O_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	s_1
O_1	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	s_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
O_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}	s_m
$Demanda$	d_1	d_2	$\dots$	d_n	

Tabla 2

Fuente: Propia.

Repasando nuevamente la estructura del modelo matemático del problema de la del ejemplo 7.1, si se envía x_{ij} unidades desde el origen O_i hasta el destino D_j y c_{ij} es el costo unitario de envió, el costo total en que se incurre al realizar todos los envíos está dado por una función objetivo Z, la finalidad del problema es:

$$Minimizar\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \ \ para\ todo\ i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j\ para\ todo\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0\ para\ i = 1, 2, \dots, m\ y\ j = 1, 2, \dots, n$$

Vemos en la representación algebraica del modelo que el problema de transporte también es un problema de programación lineal con algunas características especiales, tales particularidades son las que apoyarán el abordaje de la solución mediante procedimientos diferentes a los aplicados a habituales problemas de programación lineal.

La revisión de la representación matricial del modelo del problema 3 nos permite extender la respectiva representación del caso general de situaciones que pueden modelarse como problemas de transporte A continuación mostramos la matriz de coeficientes A de coeficientes de las restricciones.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn}
\end{array}$$
$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots\ \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots\ \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots\ \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots\ \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}$$

Imagen 1

Fuente: Propia.

Problemas con un destino o un origen ficticio

Dado que algunos casos los problemas a resolver no corresponden a problemas del transporte en que la oferta es igual a la demanda, un caso particular es aquel en que la oferta supera la demanda, por lo que resulta conveniente definir un destino ficticio, al cual enviar la diferencia de disponibilidad, o un origen ficticio desde el cual se satisface la demanda faltante. A continuación presentamos un ejemplo de cada caso.

Aplicación de la idea de destino ficticio

Ejemplo 7.2

Una empresa fabricante de motores para motocicletas tiene el compromiso de fabricación y entrega de motores para los cuatro meses próximos por lo cual debe realizar la debida planificación de la distribución. La tabla 3 muestra, para cada mes, la información de la cantidad de motores requerido, límite de producción, costo de producción de cada motor y costo unitario de almacenamiento por producir más de lo requerido. Los costos están dados en millones de pesos.

Mes	Unidades requeridas	Límite de producción	Costo de cada motor	Costo unitario de almacenamiento
1	10	25	1,08	0,015
2	15	35	1,11	0,015
3	25	30	1,10	0,015
4	20	10	1,13	

Tabla 3

Fuente: Propia.

Nótese que en el cuarto mes la capacidad de producción es superada por los requerimientos, y que en cada mes los costos de producción se van incrementando, lo que en conjunto da lugar a considerar la necesidad de adelantar producción en los primeros, pero incurriendo en gastos de almacenamiento.

La administración desea establecer un programa de producción, para cada uno de los meses, de forma tal que los costos totales sean mínimos y se cumpla con los compromisos comerciales adquiridos. Con el fin de lograr el cometido, la administración encarga de la formulación del problema al equipo de investigación de operaciones.

Aunque la programación pedida no es un problema en el que se deba realizar una distribución física de motores a destinos específicos, el equipo de investigaciones lo plantea como un problema que se puede ajustar al modelo genérico del problema del transporte, en el cual se considera como orígenes la producción de motores y como destino las entregas a realizar, para ello inicialmente el equipo define los siguientes términos.

$O_i = Cantidad\ de\ motores\ producidos\ en\ el\ mes\ i\ (i = 1, 2, 3, 4)$

$D_j = Cantidad\ de\ motores\ para\ entrega\ en\ el\ mes\ j\ (j = 1, 2, 3, 4)$

$x_{ij} = Cantidad\ de\ motores\ producidos\ en\ el\ mes\ i\ para\ entrega\ en\ el\ mes\ j.$

$$x_{ij} = Costo\ de\ cada\ unidad\ x_{ij} = \begin{cases} costo\ de\ producción + costo\ de\ almacenaje\ si\ i \leq j \\ Valor\ aún\ no\ determinado\ si\ i > j \end{cases}$$

$s_i = Valor\ no\ determinado$

$D_i = Cantidad\ de\ mototres\ a\ entregar\ en\ el\ mes\ j$

De las consideraciones anteriores es claro que no puede producirse motores en mes dado para ser entregados en meses anteriores, lo que significa que no hay valor a asignar a los x_{ij} para $i > j$, sin embargo, dado el interés de modelarlo como el problema del transporte, es necesario definir valores para estos costos no conocidos. En este punto se usa un gran valor M con el mismo significado que el usado en el método de la gran M en el contexto del Método Simplex, para que al final resulten valores de $x_{ij} = 0$ para $i > j$.

Por otra parte, a la luz del modelo del problema del transporte, en este caso no están definidos los valores correspondientes a la oferta, esto debido a que las cantidades a producir en cada mes no son fijas y es precisamente parte de lo que se quiere saber, pero el modelo de problema del transporte exige que todos los parámetros sean cantidades fijas. Para tratar esta situación, en aras del ajuste al modelo deseado, debemos considerar que los límites de producción establecerían las cuatro restricciones siguientes:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 30$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 10$$

Dadas las restricciones en forma de inecuaciones, se hace necesario la inclusión de una variable de holgura en cada ecuación para convertirlas en ecuación, a lo que en este contexto se le da la interpretación de entrega o envío a un destino ficticio. El costo de envío a un destino ficticio tiene valor cero. La tabla 4 muestra los parámetros conocidos procedentes de la tabla 3, asigna el valor de M a los valores desconocidos y considerando las variables de holgura necesarias, con lo cual se satisface el requerimiento inicial de la administración de contar con la formulación del modelo del problema.

	Parámetros fundamentales del problema (costos unitarios, ofertas y demandas)					
O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_{5f}	$Oferta$
$O_1: Mes\ 1$	1,08	1,095	1,110	1,125	0	25
$O_2: Mes\ 2$	M	1,110	1,125	1,140	0	35
$O_3: Mes\ 3$	M	M	1,100	1,115	0	30
$O_4: Mes\ 4$	M	M	M	1,130	0	10
$Demanda$	10	15	25	20	30	

Tabla 4

Fuente: Propia.

Ejemplo de origen ficticio

Ejemplo 7.3

Una compañía distribuye agua en tanques a sectores que tienen difícil acceso al servicio, para ello compra el agua en unas fuentes O_1, O_2 y O_3 y las distribuye a los destinos D_1, D_2, D_3 y D_4. La única imposibilidad existente para hacer envíos de agua se da entre el origen O_3 y el destino D_4. El costo del envío depende de la separación geográfica entre origen y destino, pero el precio de venta es igual para todos. La tabla 7.5 muestra los costos de envíos de los tanques, las cantidades disponibles (en millones de tanques) en las tres fuentes. La empresa tiene el compromiso de proveer al menos la cantidad de agua necesaria para satisfacer las necesidades básicas de las personas en los destinos, excepto el destino D_3, que cuenta con fuente propia. La tabla 7.5 también muestra las cantidades mínimas requeridas en cada destino así como las cantidades solicitadas. En cuanto a esta última información vemos en la tabla que el destino O_2 solicita el mínimo necesario, O_1 está dispuesta a comprar hasta 20 más que el mínimo necesario, O_3 compraría hasta 30 más de lo que solicita y O_4 recibe toda la que le puedan vender.

	Costos unitarios de distribución entre origen y destino				
O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	$Oferta$
$O_1: Fuente\ 1$	16	13	22	17	50
$O_2: Fuente\ 2$	14	13	19	15	60
$O_3: Fuente\ 3$	19	20	23	$-$	s_m
$Mínimo\ requerido$	30	70	0	10	
$Cantidad\ solicitada$	50	70	30	∞	

Tabla 5

Fuente: Propia.

La administración desea formular el modelo de distribución más económico que al menos pueda satisfacer las necesidades mínimas. Para lo cual la primera reflexión lleva a que no están claramente definido cuales son los valores a usar como demandas, lo cual se debe a que dos de los destinos establecen niveles máximos y mínimo de compra y otro puede comprar toda la cantidad que se le pueda vender. El límite superior es igual a la cantidad solicitada a menos que supere la disponibilidad luego de satisfacer las necesidades mínimas de los demás destinos, situación en la cual esta cantidad es el límite superior. En el caso del destino D_4, que está dispuesta a comprar toda la cantidad que se le pueda vender, el límite máximo es la suma de disponibilidades de las tres fuentes menos la suma de los mínimos requeridos por los otros destinos, revisando estos valores encontramos que el resultado es 60.

Con el fin de ajustar el problema al modelo del problema del transporte, se requiere que las demandas sean cantidades constantes, con el fin de poder considerar que estas demandas corresponden a las cotas superiores, procedemos de forma similar a la situación del ejemplo 7.2, donde veíamos un exceso de oferta y se introdujo un destino ficticio que supuestamente recibiera la oferta sobrante. En este caso en el que la demanda supera la oferta, se introduce un origen ficticio desde el cual se enviaría el déficit de disponibilidad. Este origen ficticio tendría una disponibilidad, también ficticia, cuyo valor es el déficit de disponibilidad, que corresponde a la suma de máximas demandas menos la disponibilidad total real, revisando los valores encontramos que esta capacidad ficticia es de 50.

Por otro lado, como se debe evitar que las necesidades mínimas sean satisfechas por el origen ficticio, en la formulación también debemos considerar los límites inferiores o requerimientos mínimos de cada destino. Vemos que D_3 no indica un mínimo, por lo que no se requiere consideración alguna. En el caso de D_4 tampoco se hace consideración adicional porque su demanda de 60 excede en 10 a la disponibilidad del origen ficticio, esto indica que de la cantidad que reciba al menos 10 debe llegar de orígenes reales. De la misma forma, para D_2 no se requiere consideración adicional porque su mínimo es igual a lo solicitado. Finalmente, en el caso del destino D_1 se ve que la supuesta disponibilidad del origen ficticio podría "abastecer" una parte de los requerimientos mínimos además del adicional pedido, por tanto es necesario realizar ajustes de tal manera que el origen ficticio no "cubra" esta necesidad en más de 20 del total de 50. Este propósito se puede alcanzar si el destino D_1 se considera como dos destinos diferentes, uno de ellos con demanda de 30 y costo de un valor de M para las cantidades "enviadas" desde el origen ficticio y otro destino con demanda de 20 y costo de envío de cero para el envío al destino ficticio.

Con los anteriores razonamientos y renombrando los destinos de tal manera que del original destino D_1 se obtiene los destinos D_1 y D_2, el anterior D_2 pasa a ser D_3, D_3 pasa a ser D_4 y D_4 pasa a ser D_5 partir del segundo se obtiene finalmente la formulación como un problema del transporte mostrada en la tabla 6, la tabla también refleja las consideraciones relativas a que los costos de envío desde el origen ficticio son cero y que los del origen O_3 al destino D_4 toman un gran valor de M para hacer nada preferente el envío entre estos extremos.

	Parámetros fundamentales del problema (costos unitarios, ofertas y demandas)					
O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$
O_1: $Fuente\ 1$	16	16	13	22	17	50
O_2: $Fuente\ 2$	14	14	13	19	15	60
O_3: $Fuente\ 3$	19	19	20	23	M	50
O_{4f} $Fuente\ 4f$	M	0	M	0	0	50
$Demanda$	**30**	**20**	**70**	**30**	**60**	

Tabla 6

Fuente: Propia.

Introducción al Método Simplex de transporte

Siendo el problema del transporte un caso especial de problema de programación lineal, sería razonable entrar a resolverlo mediante el uso del Método Simplex, sin embargo la estructura de la matriz de coeficientes de restricciones mostrada en la tabla xx da lugar a una variante del Método Simplex conocida como Método Simplex de transporte.

Consideraciones frente al Método Simplex

Si se pretendiera abordar la solución del problema de transporte mediante el Método Simplex, tal como se estudió en semanas anteriores, por ejemplo en forma tabular, deberíamos inicialmente transformar el enunciado de minimización en maximización, incorporar luego variables artificiales para entonces aplicar el método de la gran M. Nótese que según el modelo general el problema del transporte tiene $m+n$ ecuaciones de restricciones estructurales, por lo tanto se debería introducir $m+n$ variables artificiales.

Luego de introducir las variables artificiales y aplicar los procesos algebraicos que llevan en la fila F_0, la que corresponde a la función objetivo, los coeficientes de las variables básicas iniciales sean cero, se realiza el proceso de inicialización en el que se obtiene la primera solución básica factible y hacer la prueba de optimalidad que a la larga conduce a la necesidad de llevar a cabo la primera iteración. En la primera iteración, y en las demás que sean necesarias, se determina las variables básicas entrante y saliente, se reduce el sistema a la forma apropiada de eliminación gaussiana y se determina la nueva solución básica que sea factible. Sin embargo hemos comentado que la estructura especial de la matriz o tabla de coeficientes de restricciones en el problema de transporte permite simplificar las operaciones, que de otro modo serían realizadas a través del Método Simplex, lo que da lugar al Método Simplex del transporte. Los detalles que conducen a las simplificaciones de operaciones gracias a la estructura especial de la tabla de coeficientes, resultan bastante extensos para ser tratados en esta cartilla, por lo cual aquí se describirá sin demostraciones el procedimiento correspondiente al método de solución, sin embargo, en fuentes bibliográficas más rigurosas se ilustran los detalles.

Fases del procedimiento del Método Simplex del transporte

Para la descripción de los procedimientos de solución asociados con el Método Simplex del transporte retomamos el modelo general correspondiente al problema de m puntos de origen, n destinos en los que se quiere minimizar el costo total de distribución asumiendo la igualdad entre oferta y demanda, y proporcionalidad entre los costos de envío y el respectivo costo unitario. Se describe a continuación las fases que contiene el procedimiento del Método Simplex de transporte

Iniciación parte 1: obtener una solución básica inicial

En problemas de m restricciones estructurales resueltos mediante el Método Simplex habitual el número de variables básicas es también m. En cambio, en el Método Simplex del transporte, donde hay $m + n$ restricciones, el número de variables básicas $m+n-1$, si el estudiante lo desea, los detalles de esta afirmación los puede consultar en fuentes más avanzadas. El proceso de determinación de la solución básica inicial hace uso de pasos sucesivos mediante los cuales se va seleccionando las variables básicas de esa solución. Antes de describir el proceso para determinar la solución básica inicial, se describe los criterios según los cuales se va seleccionando las variables que han de considerarse como básicas. Estos criterios toman en cuenta los valores de las columnas asociadas con los destinos y las filas asociadas con los orígenes. Los criterios son los descritos e ilustrados a continuación.

Regla de la esquina noroeste

Si miramos el cuerpo de la tabla simplex de transporte, identificamos x_{11} es la esquina noroeste y es la que se selecciona como primera variable de la solución básica inicial. A partir de aquí, si se tiene que la más reciente selección de variable básica es x_{ij}, y si queda disponibilidad del origen $O_{i,}$ entonces la siguiente selección corresponde a x_{ij+1} (se obtiene desplazándose por la misma fila hacia la columna de la derecha), en caso contrario se selecciona x_{i+1j}.

Aplicación del método de la esquina noroeste

Ejemplo 7.4.

Con base en la formulación de la tabla 7.6 correspondiente al ejemplo 7.3, usar el método de la esquina noroeste para hallar la solución básica factible inicial. Según la formulación se tiene $m = 4$ puntos de origen y $n = 5$ destinos la toda solución factible tiene $m+n-1 = 8$ variables básicas.

O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$
O_1	16 30	16 20	13	22	17	50
O_2	14	14 0	13 60	19	15	60
O_3	19	19	20 10	23 30	M 10	50
O_{4f}	M	0	M	0	0 50	50
$Demanda$	30	20	70	30	60	

Tabla 7.

Fuente: Propia.

La tabla 7 muestra la ruta de selección de las variables básicas. Siguiendo el criterio de la regla de la esquina noroeste la primera selección es la de la variable x_{11}, a la cual se le asigna la totalidad de la demanda de esa columna, es decir, se hace $x_{11} = 30$, quedando una cantidad disponible de $50 - 30 = 20$, del origen x_{11} por tanto, como aún hay disponibilidad del origen O_1, la siguiente selección es la de la columna de la derecha en la misma fila resultando en la asignación $x_{12} = 20$. Luego de esta asignación no queda más disponibilidad del origen O_1, por tanto la siguiente asignación es a la siguiente fila en la misma columna, es decir $x_{22} = 0$. Con la última selección, en que hemos pasado a la segunda fila, sigue habiendo una disponibilidad de 60 en el origen O_2, entonces la nueva selección es en la misma fila y en la columna derecha, asignando $x_{23} = 60$, como esta disponibilidad no supera la demanda de la columna se pasa a la siguiente fila en la misma columna 2, asignando a x_{33} la cantidad de 10 que completa la demanda de esa columna, es decir $x_{33} = 10$. Del origen O_2 aún queda una disponibilidad de 40, de las cuales se asigna 30 a la siguiente variable básica, entonces $x_{34} = 30$, con lo que se completa la demanda de la tercera columna. Y quedan 10 unidades que se asigna a x_{35}, entonces $x_{35} = 10$ con lo que se agota la disponibilidad de O_3. Finalmente, el resto de la demanda de la quinta columna se satisface con la disponibilidad del origen O_4, lo que rsulta en $x_{45} = 50$ y una solución básica factible inicial de $x_{11} = 30, x_{12} = 20, x_{22} = 0, x_{23} = 60, x_{33} = 10, x_{34} = 30, x_{35} = 10$ y $x_{45} = 50$. Para esta solución básica inicial el valor de Z es:

$$Z = 16x_{11} + 16x_{12} + 14x_{22} + 13x_{23} + 20x_{33} + 23x_{34} + Mx_{35} + 0x_{45}$$

$$Z = \ x_{11} + 16x_{12} + 14x_{22} + 13x_{23} + 20x_{33} + 23x_{34} + Mx_{35} + 0x_{45}$$

$$Z = 16(30) + 16(20) + 14(0) + 13(60) + 20(10) + 23(30) + M(10) + 0(50) =$$

$$Z = 2470 + 10M$$

Método de aproximación de Vogel

Para un caso específico en que se esté considerando una fila o una columna se calcula la diferencia entre el menor costo c_{ij} y el costo que le sigue en la misma fila o columna. Para resultados diferentes de cero, en la fila o columna con mayor diferencia se elige como variable básica la de menor costo unitario que queda, en caso de empates se elige arbitrariamente.

Método de aproximación de Russell

En este método, para cada fila de origen O_i que aún se considere se halla el mayor costo unitario c_{ij} de los que quedan en esa fila, denotado mediante $\bar{\alpha}_i$. Mientras que para la columna de destino D_j que se está considerando se halla el mayor costo unitario c_{ij} de los que están en esa columna, denotado por $\bar{\beta}_i$, y para las variables x_{ij} aún no seleccionadas de estas filas o columnas se calcula Δ_{ij} dado por $\Delta_{ij}= c_{ij} - \bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i$. La variable cuyo valor de Δ_{ij} sea más negativo es seleccionada como variable básica.

A continuación se presenta ejemplos que ilustran el uso de los métodos o criterios de selección de variables básicas que harán parte de la solución básica factible inicial.

Aplicación del método de aproximación de Russel

Ejemplo 7.5

Con base en la formulación de la tabla 7.6 correspondiente al enunciado del ejemplo 7.3, usar el método de aproximación de Russel para hallar la solución básica factible inicial.

$$\Delta_{ij}= c_{ij} - \bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i$$

En la primera iteración de este método, para seleccionar la primera variable básica, encontramos que los correspondientes valores de $\bar{\alpha}_i$ y $\bar{\beta}_i$ son:

$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$	$\bar{\alpha}_4$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$	$\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_5$
22	19	M	M	M	19	M	23	M

Al calcular todos los valores de $\Delta_{ij}= c_{ij} - \bar{\alpha}_i - \bar{\beta}_i$ (usando los respectivos valores c_{ij}) encontramos que $\Delta_{45}= 2M$ es el más negativo de los Δ_{ij} por tanto se selecciona x_{45} como variable básica y se asigna $x_{45} = 50$, con lo cual se agota la disponibilidad del origen O_4 y en la siguiente selección no se considera la fila de este origen.

En la segunda iteración los correspondientes valores de $\bar{\alpha}_i$ y $\bar{\beta}_i$ son:

$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$	$\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_5$
22	19	M	19	19	20	23	M

Al calcular los valores Δ_{ij} encontramos que $\Delta_{15} = 5 - M$ es el más negativo de los Δ_{ij} por tanto se selecciona x_{15} como variable básica y se asigna $x_{15} = 10$, para completar la demanda de la columna 5 y no volver a considerarla y dejando una disponibilidad de 40 en el origen O_1.

Para la tercera selección tenemos:

$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	$\bar{\alpha}_3$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_3$	$\bar{\beta}_4$
22	19	23	19	19	20	23

Al calcular los valores Δ_{ij} encontramos que $\Delta_{13} = -29$ es el más negativo de los Δ_{ij} por tanto se selecciona x_{13} como variable básica y se asigna $x_{13} = 40$, lo que aún no completa la demanda de la columna 3. Se propone al estudiante como ejercicio de repaso la verificación de estos cálculos y el completar la selección de la solución básica inicial, el resultado completo debe ser:

$$x_{45} = 50, x_{15} = 10, x_{13} = 40, x_{23} = 30, x_{21} = 30, x_{31} = 0, x_{32} = 20, x_{34} = 30$$

Mientras que el valor de Z es:

$$Z = 13x_{13} + 17x_{15} + 14x_{21} + 13x_{23} + 19x_{31} + 19x_{32} + 23x_{34} + 0x_{45}$$

$$Z = 13(40) + 17(10) + 14(30) + 13(30) + 19(0) + 19(20) + 23(30) + 0(50)$$

$$Z = 520 + 170 + 420 + 390 + 380 + 690 = 2570$$

La solución completa al problema se abordará en la cartilla correspondiente a la semana 8.

4

Unidad 4

Solución del problema del transporte y problema de asignación

Investigación de operaciones I

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Hace aproximadamente 50 días iniciamos el curso de Investigación de operaciones I y en las 7 semanas que han pasado hemos hecho un intenso recorrido por algunas de las áreas de la investigación de operaciones fundamentalmente relacionadas con la programación lineal. Habiendo llegado la semana 8 nos disponemos a dar continuidad a una temática iniciada en la semana anterior, el problema de transporte, y específicamente los pasos del procedimiento de solución que siguen a la obtención de la solución básica factible. Estos pasos corresponden a la prueba de optimalidad de la solución inicial y el procedimiento iterativo que ha de llevarse a cabo cuando aún no se alcanza la solución óptima. Vale destacar en este procedimiento completo, denominado Método Simplex de transporte, que el procedimiento de solución se basa en la misma filosofía del Método Simplex estándar, pero de manera mucho más ágil. Se ilustra el tratamiento temático con base en un ejemplo formulado en la semana 7.

Finalizado el tratamiento de los temas relacionados con el problema del transporte se da una mirada general a un problema más específico o más restringido conocido como problema de asignación. La solución de este problema se aborda mediante un método muy ágil conocido como método húngaro.

Recomendaciones metodológicas

¿Será que hemos repetido mucho las recomendaciones al estudiante?, seguramente sí, pero dada la importancia de las mismas es preferible pecar por exceso que por defecto, y se espera que las mismas se hayan tenido en cuenta a lo largo del curso. Veamos de nuevo: La lectura de la cartilla debe hacerse de manera muy cuidadosa, se debe aprovechar los ejercicios resueltos que aparecen en las lecturas complementarias, los videos explicativos en la sección recursos para el aprendizaje brindan vivas explicaciones sobre ejercicios resueltos y los ejercicios de repaso le permiten profundizar en el entendimiento del tema en la medida que lo enfrenta a desafíos particulares.

Dado que esta es la última semana, la última actividad que se debe desarrollar es la evaluación final, la cual vale el 40% de la evaluación del curso, casi la mitad del mismo, por lo tanto se recomienda realizar una revisión de los temas anteriores, tener a mano ejercicios y talleres realizados o los resúmenes o apuntes que tenga.

Desarrollo temático

Solución del problema del transporte y problema de asignación

Fases del procedimiento del Método Simplex del transporte

En la cartilla de la semana 7, mediante el método de aproximación de Russel llegamos a la conclusión que para el problema del ejemplo 7.3, la solución básica factible hallada en la fase de iniciación del procedimiento de solución del Método Simplex de transporte es:

$$x_{45} = 50, x_{15} = 10, x_{13} = 40, x_{23} = 30, x_{21} = 30, x_{31} = 0, x_{32} = 20, x_{34} = 30$$

Encontramos además que el valor $Z = 2570$. Con base en ello procedemos ahora a realizar la prueba de optimalidad a esta solución inicial.

Fase de iniciación parte 2: Prueba de optimalidad

Recordemos que la prueba de optimalidad en el Método Simplex se realiza con base en los coeficientes en la fila F_0, en la cual la actual solución básica factible es óptima si los coeficientes de las variables básicas son cero y los de las variables no básicas son no negativos. En los procedimientos iterativos asociados con la obtención una nueva solución básica factible se hace necesario el uso de tediosas operaciones entre filas. En el caso del Método Simplex de transporte podemos hallar estos valores sin necesidad de las tantas operaciones, solo se requiere el cálculo de unos valores u_i y v_j a partir del conocimiento del actual conjunto de variables básicas resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0 \; para \; las \; i, j \; tal \; que \; x_{ij} \; es \; variable \; básica.$$

Entonces, una solución básica factible es óptima si y solo si $\boldsymbol{c_{ij} - u_i - v_j \geq 0}$ para (i, j) tal que x_{ij} es no básica. Con lo antes indicado, solo se necesita hallar los valores de u_i y v_j

para el actual conjunto de variables de la solución básica a partir de $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{u_i} + \boldsymbol{v_j}$ para cada x_{ij} básica. (La interpretación y significado de estos valores y demostraciones de las fórmulas relacionadas superan el alcance del curso). Dado que hay $m + n - 1$ variables básicas, también hay $m + n - 1$ ecuaciones a resolver, como se requiere un valor i por cada fila y un valor j por cada columna, se debe hallar en total $m + n$ incógnitas, es decir, una variable más que el número de ecuaciones, por tanto se asigna arbitrariamente un valor a una de las incógnitas, una válida opción es darle el valor de cero a la u_i que tiene mayor asignación en su fila, es decir la fila que tenga mayores variables básicas.

Aplicación de prueba de optimalidad

Ejemplo 8.1

Aplicar la prueba de optimalidad a la solución básica hallada a través del método de aproximación de Russel correspondiente al problema del ejemplo 7.3.

Solución

La solución básica factible hallada en la fase de iniciación, en la cartilla de la semana 7, eses:

$x_{45} = 50, x_{15} = 10, x_{13} = 40, x_{23} = 30, x_{21} = 30, x_{31} = 0, x_{32} = 20, x_{34} = 30.$

Los respectivos valores de c_{ij} a utilizar son los respectivos costos:

$c_{45} = 0, c_{15} = 17, c_{13} = 40, c_{23} = 13, c_{21} = 14, c_{31} = 19, c_{32} = 19, c_{34} = 23.$

$Para\ x_{ij}: c_{ij} = u_i + v_j$

La tercera fila es la de mayor asignación, por tanto tomamos $u_3 = 0$, entonces:

$Para\ x_{31}: c_{31} = 19 = u_3 + v_1, entonces\ 19 = 0\ + v_1, entonces\ v_1 = 19$

$Para\ x_{32}: c_{32} = 19 = u_3 + v_2, entonces\ 19 = 0\ + v_2, entonces\ v_2 = 19$

$Para\ x_{34}: c_{34} = 23 = u_3 + v_4, entonces\ 23 = 0\ + v_4, entonces\ v_4 = 23$

$Para\ x_{21}: c_{21} = 14 = u_2 + v_1, entonces\ 14 = u_2\ + 19, entonces\ u_2 = -5$

$Para\ x_{23}: c_{23} = 13 = u_2 + v_3, entonces\ 13 = -5\ + v_3, entonces\ v_3 = 18$

$Para\ x_{13}: c_{13} = 13 = u_1 + v_3, entonces\ 13 = u_1\ + 18, entonces\ u_1 = -5$

$Para\ x_{15}: c_{15} = 17 = u_1 + v_5, entonces\ 17 = -5\ + v_5, entonces\ v_5 = 22$

$Para\ x_{45}: c_{45} = 0 = u_4 + v_5, entonces\ 0 = u_4\ + 22, entonces\ u_4 = -22$

Ahora se puede hallar los valores $c_{ij} - u_i - v_j$ para las variables no básicas:

$Para\ x_{11}: c_{11} - u_1 - v_1 = 16 + 5 - 19 =\ 2 \geq 0$

$Para\ x_{12}: c_{12} - u_1 - v_2 = 16 + 5 - 19 = 2 \geq 0$

$Para\ x_{14}: c_{14} - u_1 - v_4 = 22 + 5 - 23 = 4 \geq 0$

$Para\ x_{22}: c_{22} - u_2 - v_2 = 14 + 5 - 19 =\ 0 \geq 0$

$Para\ x_{24}: c_{24} - u_2 - v_4 = 19 + 5 - 23 = 1 \geq 0$

$Para\ x_{25}: c_{25} - u_2 - v_5 = 15 + 5 - 22 = -2 < 0$

$Para\ x_{33}: c_{33} - u_3 - v_3 = 20 - 0 - 18 = 2 \geq 0$

$Para\ x_{35}: c_{35} - u_3 - v_5 = M - 0 - 22 = M - 22 \geq 0$

$Para\ x_{41}: c_{41} - u_4 - v_1 = M + 22 - 19 = M + 3 \geq 0$

$Para\ x_{42}: c_{42} - u_4 - v_2 = 0 + 22 - 19 = 3\ \geq 0$

$Para\ x_{43}: c_{43} - u_4 - v_3 = M - 0 - 18 = M - 18 \geq 0$

$Para\ x_{44}: c_{44} - u_4 - v_4 = 0 + 22 - 23 = -1 < 0$

Parámetros fundamentales del problema (costos unitarios, ofertas y demandas)							
D_j / O_i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$	u_i
O_1	16 $+2$	16 $+2$	13 40	22 $+4$	17 10	50	-5
O_2	14 30	14 0	13 30	19 $+1$	15 -2	60	-5
O_3	19 0	19 20	20 $+2$	23 30	M $M - 22$	50	0
O_{4f}	M $M + 3$	0 $+2$	M $M + 2$	0 -1	0 50	50	-22
$Demanda$	30	20	70	30	60	$Z = 2550$	
	19	19	18	23	22		

Tabla 1

Fuente: Propia.

En la tabla 1, además de los costos unitarios, ofertas y demandas, se resalta en verde las asignaciones de las actuales variables básicas; en amarillo se resalta los valores de los $c_{ij} - u_i - v_j$ de las variables no básicas. También hay una columna para los valores de los u_i y una fila para los v_j . Como hay valores negativos entre estos $c_{ij} - u_i - v_j$ se concluye que la actual solución básica no es óptima, lo que obliga a ingresar al procedimiento iterativo.

Procedimiento iterativo

Al igual que el Método Simplex estándar, el Método Simplex de transporte cuenta con la definición de las variables básicas entrante y saliente, la determinación de la nueva solución básica factible y la correspondiente prueba de optimalidad.

Selección de la variable básica entrante

La selección de la variable básica entrante se hace con base en los valores de los c_{ij} correspondientes a las variables no básicas de la iteración anterior, se elige como variable básica entrante aquella x_{ij} para la cual el c_{ij} sea el más negativo. Para el caso del ejemplo tenemos que la variable básica entrante es x_{25}.

Selección de la variable básica saliente

En lo referente a la determinación de la variable básica saliente ha de tenerse en cuenta que el aumento de la variable entrante da lugar a una serie de cambios en otras variables básicas de tal manera que se sigan cumpliendo las restricciones de oferta y demanda. Se selecciona como variable básica saliente la primera que disminuya hasta cero frente a los cambios que ocurran.

Para realizar la selección, se tiene en cuenta que el aumento de la variable entrante en una cantidad θ obliga la disminución, en esa cantidad, de alguna variable básica en la misma columna, de tal forma que se conserve fija la demanda de la columna, pero esto obliga a que aumente en θ otra variable básica en la misma fila de la variable básica que disminuye, con el fin de conservar fija la oferta de esa fila, finalmente este aumento debe ocasionar la misma disminución en otra variable básica en la misma fila de la variable entrante, y así sucesivamente hasta compensar el aumento inicial..

En general es posible encontrar varias posibilidades, en las que partiendo de la variable básica entrante, se llega a una variable básica actual de la misma fila o columna, luego a otra en la misma columna o fila de llegada y así hasta formar un bucle o ciclo cerrado entre la variable entrante y tres o más variables básicas actuales. La pregunta interesante es cual bucle recorrer para seleccionar la variable básica saliente. Se tiene como respuesta que entre los posibles bucles se elige el camino de la variable básica de menor asignación que está en la misma fila o en la misma columna de la variable entrante. En ocasiones incluso el aumento puede ser cero, dándose solo el intercambio de variables, tal como se ilustra más adelante.

O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$
O_1			13 40		17 10	50
O_2	14 30		13 30		15 $V.E$ -2	60
O_3	19 0	19 20		23 30		50
O_{4f}					0 50	50
$Demanda$	30	20	70	30	60	

Tabla 2

Fuente: Propia.

En el caso del ejemplo, en la tabla 2 se ha resumido la tabla 1 para mostrar solo los valores en las celdas asociadas con las actuales variables básicas y se ha señalado con la etiqueta **V.E** la celda de la variable básica entrante. Vemos dos posibles recorridos, si se toma el que va de **V.E** a x_{23}, se debería dar un aumento de 30 en x_{25}, una disminución de 30 en x_{23}, un aumento de 30 en x_{13} y finalmente una disminución de 30 en x_{15}, pero esto último no es posible debido a que la asignación de x_{15} es de 10 y no puede disminuir en 30. En cambio, si se toma la otra posibilidad, x_{25} aumenta en 10, x_{15} disminuye en 10, x_{13} aumenta en 10 y x_{23} disminuye en 10, lo cual sí tiene sentido. En conclusión la variable básica saliente es x_{15} porque fue la que llegó a cero en el recorrido.

Determinación de la nueva solución básica factible

Con la definición de las variables entrante y saliente la nueva solución básica factible es se obtiene actualizando las nuevas asignaciones, en el caso del ejemplo la nueva solución básica factible es:

$x_{45} = 50, x_{25} = 10, x_{13} = 50, x_{23} = 20, x_{21} = 30, x_{31} = 0, x_{32} = 20, x_{34} = 30.$

Y el nuevo valor de Z es:

$$Z = 13x_{13} + 14x_{21} + 13x_{23} + 15x_{25} + 19x_{31} + 19x_{32} + 23x_{34} + 0x_{45}$$

$$Z = 13(50) + 14(30) + 13(20) + 15(10) + 19(0) + 19(20) + 23(30) + 0(50)$$

$$Z = 650 + 420 + 260 + 150 + 380 + 690 = 2550$$

Prueba de optimalidad

Aplicando los mismos procedimientos de la prueba de optimalidad inicial, con base en la actual solución básica factible se llega a que los valores de los u_i y v_j son:

$$u_1 = -5;\ u_2 = -5;\ u_3 = 0;\ u_4 = -20$$

$$v_1 = 19;\ v_2 = 19;\ v_3 = 18;\ v_4 = 23\ ;\ v_5 = 20$$

La tabla 8.3 muestra los últimos resultados, además de los valores actualizados de asignaciones de variables básicas y los valores de los $c_{ij} - u_i - v_j$ de variables no básicas. Como hay valores negativos de $c_{ij} - u_i - v_j$, la actual solución no es óptima y se requiere realizar una nueva iteración. La actualización de esta tabla se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

D_j / O_i	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$	
O_1	16 +2	16 +2	13 50	22 +4	17 +2	50	−5
O_2	14 30	14 0	13 20	19 +1	15 10	60	−5
O_3	19 0	19 20	20 +2	23 30	M $M-20$	50	0
O_{4f}	M $M+1$	0 +1	M $M+2$	0 V.E −3	0 50	50	−20
$Demanda$	30	20	70	30	60	2550	
	19	19	18	23	20		

Tabla 3

Fuente: Propia.

Segunda iteración

De la tabla final de la primera iteración (tabla 3) se observa que el valor más negativo de los $c_{ij} - u_i - v_j$ de variable no básicas es el correspondiente a x_{44}, por tanto esta es la variable entrante. El ciclo señalado en la tabla indica que ahora la variable básica saliente es x_{34} con lo cual, al hacerse cero, el conjunto de nuevas asignaciones, que define la nueva solución básica factible es:

$$x_{44} = 30, x_{45} = 20,\ x_{25} = 40, x_{13} = 50, x_{23} = 20, x_{34} = 0, x_{31} = 30, x_{32} = 20,$$

Y el nuevo valor de Z es:

$$Z = 13x_{13} + 13x_{23} + 15x_{25} + 19x_{31} + 19x_{32} + 23x_{34} + 0x_{44} + 20x_{45}$$

$$Z = 13(50) + 13(20) + 15(40) + 19(30) + 19(20) + 23(0) + 0(30) + 0(20)$$

$$Z = 650 + 260 + 600 + 570 + 380 = 2460$$

Con el nuevo conjunto de variables básicas, para la prueba de optimalidad se calcula como antes los valores de $u_{i,}$ v_j y los $c_{ij} - u_i - v_j$ del nuevo conjunto de variables no básicas. En la tabla 4 se muestra estos valores y la actualización de asignaciones a las variables básicas. De la tabla se deduce que $c_{33} - u_3 - v_3$ es negativo, por tanto la actual solución básica no es óptima.

Tabla final de la segunda iteración							
O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$	u_i
O_1	16 / $+5$	16 / $+5$	13 / 50	22 / $+7$	17 / $+2$	50	-8
O_2	14 / $+3$	14 / $+3$	13 / 20	19 / $+4$	15 / 40	60	-8
O_3	19 / 30	19 / 20	20 / $\boldsymbol{V.E}$ -1	23 / 0	M / $M-23$	50	0
O_{4f}	M / $M+4$	0 / $+4$	M / $M+2$	0 / 30	0 / 20	50	-23
$Demanda$	30	20	70	30	60	$Z = 2460$	
	19	19	21	23	23		

Tabla 4

Fuente: Propia.

Tercera iteración

De la tabla final de la segunda iteración se ve que en esta iteración en la que x_{33} es la variable básica entrante. La tabla también muestra el ciclo de las modificaciones en las asignaciones de las variables básicas, comenzando con el "aumento" en la variable entrante. Escribimos aumento entre comillas debido a que no es posible un aumento real en x_{33} puesto que x_{34} no puede disminuir a partir de su actual valor cero, en este caso se considera que el aumento es cero, pero de todas formas x_{33} se convierte en variable básica y x_{34} en no básica. El nuevo conjunto de variables básicas es ahora:

$x_{44} = 30, x_{45} = 20,\ x_{25} = 40, x_{13} = 50, x_{23} = 20, x_{33} = 0, x_{31} = 30, x_{32} = 20,$

El valor de Z es:

$$Z = 13x_{13} + 13x_{23} + 15x_{25} + 19x_{31} + 19x_{32} + 20x_{33} + 0x_{44} + 20x_{45}$$

$$Z = 13(50) + 13(20) + 15(40) + 19(30) + 19(20) + 20(0) + 0(30) + 0(20)$$

$$Z = 650 + 260 + 600 + 570 + 380 = 2460$$

Tabla final de la segunda iteración							
O_i \ D_j	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	$Oferta$	u_i
O_1	16 $+4$	16 $+4$	13 50	22 $+7$	17 $+2$	50	-7
O_2	14 $+2$	14 $+2$	13 20	19 $+4$	15 40	60	-7
O_3	19 30	19 20	20 0	23 $+1$	M $M-22$	50	0
O_{4f}	M $M+3$	0 $+3$	M $M+2$	0 30	0 20	50	-22
$Demanda$	30	20	70	30	60	$Z = 2460$	
	19	19	20	22	22		

Tabla 5

Fuente: Propia.

Con la nueva solución básica, se calcula los nuevos valores de $u_{i,}$ v_j y $c_{ij} - u_i - v_j$ de las variables no básicas. La tabla 8.5 es la tabla final actualizada a la tercera iteración, de donde se deduce que la actual solución es óptima debido a que todos los valores de $c_{ij} - u_i - v_j$ asociados con variables no básicas son no negativos.

Se tiene entonces que la mejor solución es:

Enviar 50 tanques del origen O_1 al destino D_1, con lo cual se agota la oferta del origen O_1.

Enviar desde O_2 20 tanques a D_3 y 40 a D_5 con lo cual se agota la oferta del origen O_2.

Enviar desde O_3 30 tanques a D_1 y 20 a D_2 con lo cual se agota la oferta del origen O_3.

El problema de asignación

Así como el problema del transporte es un caso especial de problema de programación, en el que la estructura del modelo subyacente da lugar a la aplicación de una variante del método simplex, se tiene en el área de la investigación de operaciones otro tipo de problema de programación lineal con características particulares, este es el problema de asignación, más aún el problema de asignación es un caso especial de problema del transporte.

En el contexto del problema de asignación existen los términos específicos de **asignados** y **tareas** asociados precisamente con los recursos que se dedican o asignan a actividades. Como ejemplo de recursos asignados encontramos, máquinas, personas, capacidad de trabajo, plantas de procesamiento, entre otras, mientras que entre las tareas se cuenta el aprovechamiento mismo de una máquina o capacidad de trabajo. Visto el problema de asignación como un problema de transporte, los asignados son los orígenes y las tareas son los destinos habiendo igual cantidad de origen y destinos y un solo origen para un solo destino.

Un problema de asignación, o cualquiera que pueda modelarse como tal, cumple con las siguientes características.

- El número de asignados y el de tareas son iguales a un mismo número n.
- Se asigna una sola a cada uno de los asignados.
- Cada tarea es atendida por uno solo de los asignados.
- Se incurre en un costo c_{ji} al utilizar el asignado a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ para realizar la tarea la tarea t_j $(j = 1, 2, \dots, n)$.
- El interés u objetivo de problema es definir de qué forma realizar las asignaciones a las tareas de tal manera que los costos totales sean los mínimos.

En el estudio del problema del transporte vimos que existen situaciones reales en los que la oferta no coincide con la demanda, en cuyo caso es necesario la incorporación de orígenes o destinos ficticios, de tal forma que la nueva situación se pueda ajustar al modelo correspondiente. En el caso de problemas de asignación sucede algo parecido, siendo necesario la incorporación de asignados o tareas ficticias para que el problema se enmarque en el modelo y aplicar los respectivos procedimientos de solución.

Modelo general de un problema de asignación

El tratamiento matemático dado a un problema de asignación se basa en variables de decisión x_{ij} que sólo pueden tomar los valores 0 o 1, según esto se tiene

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; se \; asigna \; el \; recurso \; a_i \; a \; la \; tarea \; t_j \\ \qquad para \; i,j = 1,2,\dots,n \\ 0 \; en \; caso \; contrario \end{cases}$$

Si Z es el costo total de asignar los recursos a_i a las tareas t_j, entonces la finalidad del problema es:

$$Minimizar \; Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$Sujeto \; a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \; para \; todo \; i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \; para \; todo \; i = 1,2,\dots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \; para \; todo \; i,j = 1,2,\dots,n$$

Antes ya hemos señalado que cada asignado se puede dedicar a una sola tarea, lo que en el conjunto de restricciones esto se refleja en el hecho que la primera sumatoria, sobre el conjunto de tareas es igual a 1. También hemos señalado cada tarea puede ser realizada por un solo asignado, lo que corresponde a la segunda sumatoria.

Tablas de costos equivalentes

De la formulación del problema, en la que cada recurso o asignado a_i se dedica a una tarea t_j $(para\ i, j = 1, \dots, n)$, se genera la tabla de costos del problema, la tabla genérica es la tabla 8.6.

a_i \ t_j	t_1	t_2	$\dots$	t_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	c_{n1}	c_{n2}	$\dots$	c_{nn}

Tabla 6

Fuente: Propia.

Si bien es cierto que el problema de asignación se ha formulado como un problema enmarcado en el modelo de programación lineal, más adelante se verá la importancia de la tabla de costos en un procedimiento de solución específicamente aplicable a este tipo de problemas.

Formulación y modelado de problemas de asignación

Planteamos esta parte temática con base en los siguientes ejemplos.

E

jemplo 8.1

Una empresa cuya actividad económica es la compra y venta de productos de muebles de oficina tiene por estrategia el aprovechamiento de promociones de sus proveedores para comprar mercancía a bajo costo y lograr luego un importante beneficio, sin embargo los volúmenes de compra demandan la necesidad de pago de bodegas. En el último período ha adquirido seis lotes que debe almacenar en bodegas de terceros. Indaga sobre los costos de alquiler de bodegas y registra los valores siguientes datos, donde también se muestra la disponibilidad o capacidad de cada bodega (oferta) y la necesidad de almacenar cada lote en una sola bodega.

$Lote$ / $Bodega$	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	Oferta
b_1	5	2	15	10	15	10	1
b_2	5	2	15	10	15	10	1
b_3	5	2	15	10	15	10	1
b_4	15	12	25	20	25	20	1
b_5	20	17	30	25	30	25	1
b_6	10	7	20	15	20	15	
Demanda	1	1	1	1	1	1	

Tabla 7

Fuente: Propia.

Con base en la tabla 7, el problema podría ser resuelto como un problema de transporte en el cual se quiere minimizar los costos totales de almacenamiento, lo cual está dado por:

$$Minimizar\ Z = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij}$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 1\ para\ todo\ i = 1,2,\dots,6$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} = 1\ para\ todo\ i = 1,2,\dots,6$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ para\ todo\ i,j = 1,2,\dots,6$$

Ejemplo 8.2

Una empresa transportadora dispone de cuatro tipos de vehículos para carga pesada y asigna a los conductores según la experiencia y habilidad de manejo de los mismos, según la asignación se puede afectar el consumo de gasolina de los vehículos. La empresa tiene entre sus empleados con tres conductores para estos vehículos. Los costos adicionales de asignar el conductor C_i al vehículo V_j en el consumo de combustible se dan en la tabla 8.

$Vehículo$ / $Conductor$	V_1	V_2	V_3	V_4
C_1	180	150	200	2000
C_2	250	305	450	500
C_3	200	208	320	100

Tabla 8

Fuente: Propia.

En este caso el problema no se enmarca directamente el contexto de problemas de asignación, en razón a que no hay igual número de vehículos y conductores, sin embargo

Se puede incorporar un conductor ficticio C_{4f} a la formulación. El costo para este conductor es cero, de tal manera que no incida sobre la función objetivo, por tanto se genera la tabla 9.

$Vehículo$ / $Conductor$	V_1	V_2	V_3	V_4
C_1	180	150	200	2000
C_2	250	305	450	500
C_3	200	208	320	100
C_{4f}	0	0	0	0

Tabla 9.

Fuente: Propia.

Solución del problema de asignación. El algoritmo húngaro

Dado que el problema de asignación es un caso especial de problema de programación lineal, más específicamente un problema de transporte, podría resolverse como tal, pero dada las características particulares, también existe un algoritmo especial denominado algoritmo húngaro. En esta sección nos dedicamos a la descripción y uso de este algoritmo y los elementos de los que se vale para dar solución a problemas de asignación.

El algoritmo húngaro trabaja a partir de los datos de esta tabla de costos para obtener un conjunto de sucesivas tablas equivalentes que solo pueden estar compuestas de números positivos y cero, y que en últimas llevan a la consecución de la solución óptima. ¿Cómo se halla estas tablas equivalentes? El fundamento inicial radica en que se puede sumar o restar cualquier valor de cualquier elemento o un mismo valor de cualquier fila o columna sin que cambie la esencia del problema. Esto lo que significa es que la solución óptima de una nueva tabla es la misma solución óptima de su tabla precedente, de ahí el nombre de tablas equivalentes.

La operación concreta con que inicia el algoritmo, para obtener tablas equivalentes de costos, consiste en restar a cada fila el menor número contenido en ellas, lo que dará lugar a una tabla equivalente que contiene al menos un cero en todas las filas, pero podría haber alguna columna que no tenga cero, en cuyo caso se procede a restar a todos los elementos de cada columna el valor más pequeño contenido en ella. Estas dos operaciones garantizan que en todas las filas y en todas las columnas haya elementos cero. Si los ceros obtenidos brindan un completo conjunto de asignaciones, estas últimas conforman una solución óptima del problema y se llega al final del algoritmo. Los detalles o pasos del algoritmo son los siguientes:

Paso 1. Hallar tabla de costos equivalentes: restar el menor valor de cada columna a los elementos de esa columna y, en la tabla que resulta de ello, restar el menor valor de cada fila a cada elemento de la fila. Esto dará como resultado una tabla en la que hay al menos un cero en cada fila y en cada columna.

Paso 2. Verificar si se ha alcanzado la optimalidad: para ello se inicia un cero a cada fila iniciando por la fila que contenga menor cantidad de ceros, luego se cancela o se tacha los otros ceros que se encuentren en esa fila y sobre la columna que esta el asignado. Esta operación se debe repetir con las demás filas hasta realizar todas las asignaciones (de ceros) posible y no haya ceros que cancelar. La solución óptima existe si con el reordenamiento de las columnas se puede obtener una diagonal de ceros. Si no se ha alcanzado la solución se debe realizar el siguiente paso.

Paso 3. A partir de la tabla equivalente actual se realiza las siguientes acciones:

a) Marcar o señalar las filas en las que no se haya hecho asignaciones de ceros.
b) Marcar las columnas en las que haya algún cero cancelado en alguna fila marcada.
c) Marcar las filas con ceros asignados en alguna columna marcada.
d) Realizar las operaciones b y c hasta que no se pueda marcar más filas o columnas.
e) Trazar una línea sobre las filas no marcadas y sobre las columnas marcadas, luego de esto se toma el menor número que no ha sido atravesado por línea alguna y se resta de los elementos no atravesados y se suma a los elementos de columnas atravesadas.

Realizado lo anterior se vuelve al paso 2.

Ejemplo 8.4. Considerando el enunciado del ejemplo 8.3 se tiene:

$\textbf{Vehículo}$ / $\textbf{Conductor}$	V_1	V_2	V_3	V_4
C_1	180	150	200	200
C_2	250	305	450	500
C_3	200	208	320	100
C_{4f}	0	0	0	0

Tabla 10

Fuente: Propia.

Los valores mínimos en las filas 1, 2, 3 y 4 son respectivamente $150, 250, 100$ y 0, al restar estos valores a cada elemento de su respectiva fila se obtiene la tabla 11.

$Vehículo$ / $Conductor$	V_1	V_2	V_3	V_4
C_1	30	0	50	50
C_2	0	55	200	250
C_3	100	108	220	0
C_{4f}	0	0	0	0

Tabla 11

Fuente: Propia.

Debido o a la incorporación del conductor ficticio, que dio lugar a la inclusión de una fila de ceros en la tabla, ya se tiene garantizado la existencia de al menos un cero en cada columna, por tanto no hay operación que hacer en este paso.

Con el fin de obtener ceros en la diagonal principal se reorganiza las filas de la tabla así:

$Vehículo$ / $Conductor$	V_1	V_2	V_3	V_4
C_2	**0**	55	200	250
C_1	30	**0**	50	50
C_{4f}	0	0	**0**	0
C_3	100	108	220	**0**

Tabla 11

Fuente: Propia.

Habiendo llegado a este punto se tiene que la mejor decisión es asignar el conductor C_2 al vehículo V_1, el conductor C_1 al vehículo V_2, y el conductor C_3 al vehículo V_4. El vehículo que queda libre es el V_3, según la solución le correspondería el conductor C_{4f}, pero este conductor no existe.

Ejemplo 8.5. Una empresa requiere realizar mantenimiento a 3 máquinas M_1, M_1, M_1 usadas en su proceso de producción. El mantenimiento realizado a cada máquina demora un día, pero todo el mantenimiento no puede durar más de un día, por lo cual se contrata a tres técnicos diferentes T_1, T_2, T_3 para que cada uno se dedique a una máquina. Los costos de cada técnico son varían para cada máquina. Se necesita establecer un plan de mantenimiento de tal manera que sea lo más económico posible. Los costos respectivos se presentan en la tabla siguiente:

	M_1	M_2	M_3
T_1	40.000	36.000	20.000
T_2	36.000	32.000	12.000
T_3	24.000	16.000	28.000

Tabla 12

Fuente: Propia.

Aplicando el método húngaro, se encuentra que la primera tabla equivalente de costos es:

	M_1	M_2	M_3
T_1	8.000	12.000	0
T_2	12.000	16.000	0
T_3	0	0	16.000

Tabla 13

Fuente: Propia.

Comenzamos una asignación por la primera fila (texto en rojo) y tachando (texto amarillo) los otros ceros de la columna. Luego asignamos y tachamos en la tercera, llegando solo a dos asignaciones de valores cero.

	M_1	M_2	M_3
T_1	8.000	12.000	0
T_2	12.000	16.000	$\cancel{0}$
T_3	0	$\cancel{0}$	16.000

Tabla 14

Fuente: Propia.

Se requiere tres asignaciones, por tanto marcamos (Fondo gris) las filas sin ceros asignados (la segunda), las columnas con algún cero cancelado en alguna fila marcada (la tercera), fila con ceros asignados en alguna columna marcada con un cero asignado (la primera). Luego se traza una línea sobre las filas no marcadas y las columnas marcadas, el resultado es el siguiente.

	M_1	M_2	M_3
T_1	8.000	12.000	0
T_2	12.000	16.000	0
T_3	0	0	16.000

Tabla 15

Fuente: Propia.

A partir de lo anterior se toma el menor de todos los números no atravesado por ninguna línea, restarlo a los elementos de las filas no atravesadas y sumarlo a los elementos de las columnas atravesadas. La nueva tabla es la siguiente.

	M_1	M_2	M_3
T_1	0	4.000	0
T_2	4.000	8.000	0
T_3	0	~~0~~	24.000

Tabla 16

Fuente: Propia.

A partir de aquí se realiza una nueva asignación comenzando por las filas que tengan menos ceros.

	M_1	M_2	M_3
T_1	0	4.000	~~0~~
T_2	4.000	8.000	0
T_3	~~0~~	0	24.000

Tabla 17

Fuente: Propia.

De donde se tiene que la mejor política es asignar el técnico 1 a la máquina 1, el técnico 2 a la máquina 3 y el técnico 3 a la máquina 2.

Bibliografia

- Bronson, R. (s.f.). Operation research. Editorial Mc Graw Hill. 2ª. Edición.
- Davis & Mckeown. (s.f.). Métodos cuantitativos para administración. Editorial Mc Graw Hill.
- Eppen, G. & Gould, F. (s.f.). Investigación de operaciones. Prentice Hall.
- Gallagher & Watson. (s.f.). Métodos cuantitativos para la toma de decisiones en administración. Editorial Mc Graw Hill.
- Hiller, F. & Lieberman, G. (2009). Introduction to operations research. McGraw-Hill.
- Mathur, K. & Solow, D. (s.f.). Investigación de operaciones. Prentice Hall.
- Moskowitz, H. & Wright, G. (s.f.). Investigación de operaciones. Editorial Prentice Hall.
- Prawda, J. (s.f.). Métodos y modelos de la investigación de operaciones (Tomo I y II), Editorial Limusa.
- Ríos, S. & Ríos, D. (s.f.). Problemas de investigación operativa. Editorial Ra-Ma, última edición.
- Shamblin, J. (s.f.). Investigación de operaciones. Editorial Mc Graw Hill.
- Taha, A. (s.f.). Investigación de operaciones. Editorial. Pearson, última Edición.
- Thierauf, R. (s.f.). Investigación de operaciones. Editorial Limusa.
- Winston, W. (s.f.). Investigación de operaciones. Editorial Iberoamericana.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED

ILUMNO